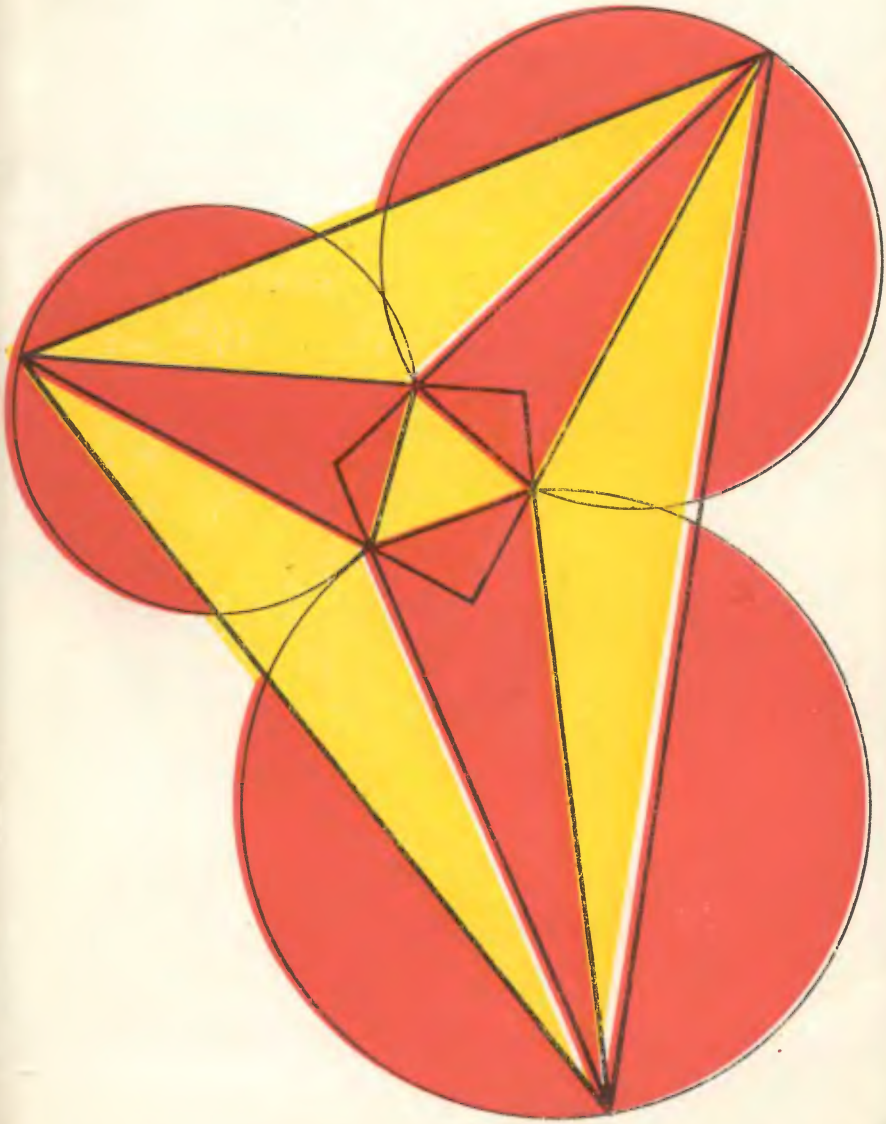
Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер

НОВЫЕ ВСТРЕЧИ С ГЕОМЕТРИЕЙ



БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 14

Г. С. М. КОКСЕТЕР, С. Л. ГРЕЙТЦЕР

НОВЫЕ ВСТРЕЧИ С ГЕОМЕТРИЕЙ

Перевод с английского
А. П. САВИНА и Л. А. САВИНОЙ

Под редакцией
А. П. САВИНА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

513
К59
УДК 513

GEOMETRY REVISITED

by

H. S. M. Coxeter

and

S. L. Greitzer

TORONTO — NEW YORK
1967

К $\frac{20202-163}{053(02)-78}$ 81-78

© Перевод на русский язык.
Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора русского перевода 5

Предисловие 10

Глава 1. **Точки и линии, связанные с треугольником** . . . 13
§ 1. Обобщенная теорема синусов 13
§ 2. Теорема Чевы 15
§ 3. Замечательные точки 17
§ 4. Вписанная и вневписанные окружности . . 21
§ 5. Теорема Штейнера — Лемуса 23
§ 6. Ортотреугольник 27
§ 7. Серединный треугольник и прямая Эйлера . . . 28
§ 8. Окружность девяти точек 31
§ 9. Педальный треугольник 34

Глава 2. **Некоторые свойства окружностей** 39

§ 1. Степень точки относительно окружности . . . 39
§ 2. Радикальная ось двух окружностей . . . 43
§ 3. Соосные окружности 47
§ 4. Еще раз о высотах и ортоцентре треугольника . . 49
§ 5. Прямые Симсона 53
§ 6. Теорема Птолемея 55
§ 7. Еще раз о прямых Симсона 57
§ 8. Теорема о бабочке 59
§ 9. Теорема Морлея 61

Глава 3. **Коллинеарность и конкурентность** 65

§ 1. Четырехугольники; теорема Вариньона 65
§ 2. Вписанные четырехугольники; теорема Брахмагупты 71
§ 3. Треугольники Наполеона 76
§ 4. Теорема Менелая 82
§ 5. Теорема Паппа 85
§ 6. Перспективные треугольники; теорема Дезарга . . 86

§ 7. Шестиугольники 90
§ 8. Теорема Паскаля 92
§ 9. Теорема Брианшона 95

Глава 4. **Преобразования** 99

§ 1. Параллельный перенос 100
§ 2. Поворот 102
§ 3. Разворот 105
§ 4. Симметрия 106
§ 5. Задача Фаньяно 108
§ 6. Задача о трех кувшинах 110
§ 7. Дилатация 116
§ 8. Спиральное подобие 118
§ 9. Генеалогия преобразований 124

Глава 5. **Введение в инверсивную геометрию** 127

§ 1. Разбиение 127
§ 2. Сложное отношение 131
§ 3. Инверсия 132
§ 4. Круговая плоскость 138
§ 5. Ортогональность 141
§ 6. Теорема Фейербаха 145
§ 7. Соосные окружности 148
§ 8. Инверсное расстояние 152
§ 9. Гиперболические функции 157

Глава 6. **Введение в проективную геометрию** 163

§ 1. Полярное преобразование 163
§ 2. Полярная окружность треугольника 168
§ 3. Конические сечения 170
§ 4. Фокус и директриса 173
§ 5. Проективная плоскость 176
§ 6. Центральные конические сечения 179
§ 7. Стереографическая и гномоническая проекции . . 183

Ответы и указания к упражнениям 188

Библиография 212

Словарь основных терминов, используемых в книге . . . 215

Указатель 220

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

«Вновь я посетил...»
А. С. Пушкин

Дословным переводом названия этой книги является «Вновь посещенная геометрия». Авторы как бы проводят читателя по наиболее красивым местам древней, но нестареющей страны — Геометрии.

Когда-то геометрия олицетворяла всю математику. Но математика росла и развивалась, особенно бурно в последние 200 лет. Возникли новые направления: математический анализ, теория множеств, топология, совсем иначе стала выглядеть алгебра. Конечно, развивалась и геометрия, однако некоторые математики начали в последнее время относить ее к числу второстепенных математических направлений. Это мнение нашло свое отражение и в содержании школьных программ по математике, как в США, так и в ряде других стран.

Книга Г. С. М. Коксетера и С. Л. Грейтцера является ярким документом в защиту геометрии, за утверждение геометрии на подобающем ей месте в системе школьного образования.

В то же самое время она является прекрасным материалом для работы школьных математических кружков. Изучение этой книги дает возможность взглянуть на геометрию в целом и в то же время познакомиться с отдельными ее жемчужинами. Именно поэтому книга включена в серию «Библиотека математического кружка».

Большинство книг этой серии (исключение составляет лишь «Числа и фигуры» Г. Радемахера и О. Теплица) написано в «эвристической» манере изложения, а именно, читатель входит в круг рассматриваемых вопросов, решая последовательно серию задач. Если задача оказывается для него слишком сложной, он может прочесть ее решение. Таким образом, читатель сам становится как бы исследователем, самостоятельно открывающим эту область математики. Однако, при этом полностью исчезает исторический аспект рассматриваемого вопроса.

Книга Г. С. М. Кокстера и С. Л. Грейтцера, хотя и содержит много задач, но написана в обычной манере последовательного изложения материала. При этом авторы насытили изложение большим количеством интересных сведений по истории появления идей и результатов, что делает книгу еще более привлекательной.

Несколько слов об авторах книги. Гарольд Скотт Макдональд Коксетер — профессор университета в Торонто (Канада) — один из крупнейших современных геометров, автор ряда книг, две из которых «Введение в геометрию» и «Действительная проективная плоскость» ([17] и [18]) переведены на русский язык. Заметим, что транскрипция его имени в этих книгах (Г. С. М. Кокстер и Х. С. М. Кокстер) отличается от примененной здесь; однако было решено перейти на эту более правильную транскрипцию, тем более, что она уже стала встречаться в русской литературе по математике.

Самуэль Грейтцер, профессор математики Рутгерского университета (США), более 25 лет проработал школьным учителем математики. Он является основным организатором Всеамериканских математических олимпиад, которые по стилю сходны со Всесоюзными математическими олимпиадами. В течение ряда по-

следних лет он руководит командой США на Международной математической олимпиаде школьников.

Перевод книги был осложнен двумя обстоятельствами: во-первых, в настоящее время средняя школа СССР только-только перешла на новые программы по математике и одновременно на новую терминологию и новые обозначения, непривычные для лиц, закончивших среднюю школу до 1977 года, а, во-вторых, Коксетером разработана своя стройная и логичная система обозначений, например, площадь треугольника ABC обозначается через (ABC), и т. д. В результате перед переводчиками встал трудный вопрос о выборе терминологии и обозначений.

Поскольку эта книга адресована в первую очередь школьникам, то за основу была взята система обозначений, применяющаяся сейчас в средней школе. При этом были сделаны небольшие отклонения, позволяющие без труда читать эту книгу и человеку, незнакомому с новой терминологией и новыми обозначениями.

В частности, здесь употребляется термин «конгруэнтность фигур» вместо ранее существовавшего термина «равенство фигур», однако, во многих случаях по отношению к отрезкам и углам сохранен термин «равенство», причем имеется в виду равенство длин отрезков и величин углов. Этого же принципа придерживаются и авторы учебников, принятых в настоящее время в школе. Заметим, что пунктуальное применение терминов «конгруэнтность» и «равенство длин отрезков» привело бы к существенному утяжелению текста, не говоря уже о появлении таких «монстров», как «равновеличинобедренный треугольник» или «конгруэнтносторонний треугольник».

Длина отрезка AB здесь обозначается через $|AB|$, как и принято сейчас в школе, но не применяются обозначения $[AB]$, $]AB[$, (AB) для отрезка,

интервала и прямой, а просто указывается, что именно имеется в виду: прямая AB, отрезок AB или интервал AB. Такое указание невозможно в формуле, однако там фигурирует лишь длина отрезка, для которой есть четкое обозначение. Однако в этой книге рассматриваются также и направленные отрезки. В формулах они обозначаются просто через AB, CD и т. д., а произведение направленных отрезков (лежащих на одной прямой), например, AB и CD обозначается через $AB \times CD$, в то время как произведение длин этих отрезков обозначается через $|AB| \cdot |CD|$.

Употребление знака $\times$ в качестве знака умножения направленных отрезков существенно еще и потому, что через $AB \cdot CD$ авторы книги обозначают точку пересечения прямых AB и CD.

Теперь несколько слов о терминологии. Существенную роль в тексте книги имеет поворот плоскости на 180°, названный авторами «half-turn» и переведенный как *разворот*. Хотя такое преобразование плоскости и совпадает с хорошо известной *центральной симметрией*, однако употребление термина *центральная симметрия* оказалось невозможным, поскольку свойства этого преобразования выводились из свойств поворота.

Далее, сохранен термин «изометрия» вместо более привычного термина «движение», так как в тексте акцентируется именно сохранение расстояний при таких преобразованиях.

Систематическое использование в книге термина «коллинеарность» привело к сохранению авторского термина «коллинеация» (collineation) для преобразований, переводящих прямые в прямые, вместо обычно употребляемого термина «аффинные преобразования».

Последним терминологическим новшеством книги является употребление термина «дилатация» (от dilatation — расширение) для обозначения преобра-

зований плоскости, при которых каждая прямая переходит в параллельную ей прямую. Этот класс преобразований состоит из гомотетий и параллельных переносов, однако в русской математической литературе еще не было термина для обозначения этого весьма естественного класса преобразований.

При переводе была существенно расширена библиография (добавленные книги отмечены звездочками). В их числе широкодоступные книги из серии «Популярные лекции по математике» [1], [2], [6], [12], [25], [32], [35], изучение которых даст возможность взглянуть на изложенные в этой книге вопросы с другой точки зрения (в частности, на конические сечения, изложение которых в этой книге весьма нетрадиционно). Желающим глубже познакомиться с рассматриваемой тематикой окажут помощь книги [14], [15], [18], [33], [44], [45], [46], достаточно доступные для широкого круга читателей.

Я приношу искреннюю благодарность И. М. Яглому, чьи замечания и предложения существенно содействовали улучшению перевода этой книги.

Также благодарю В. Г. Шнитке за помощь при переводе эпиграфов.

А. П. Савин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тот, кто ни во что не ставит евклидову геометрию, подобен человеку, который, вернувшись из чужих краев, поносит свой дом.

Г. Фордер

В программу по математике средней школы (США) входит годичный курс геометрии плоскости или курс геометрии и элементарной аналитической геометрии, называемый «математика-10». Обычно для ученика средней школы на этом и заканчивается знакомство с геометрией. В противоположность этому, математически одаренным школьникам программы средней школы дают возможность дальнейшего изучения элементарной алгебры, дополнительных ее глав и даже высшей алгебры. Поэтому естественно наблюдаемое пристрастие к алгебре и предубеждение против геометрии. Более того, введенные в заблуждение энтузиасты пытаются убедить учащихся, что геометрия находится «где-то в стороне от основного направления математики» и что анализ или теория множеств должны вытеснить ее.

Возможно, тот факт, что в школьной программе геометрия занимает одно из последних мест, объясняется тем, что педагоги мало знают о природе геометрии и об успехах, которые были достигнуты ее исследователями. Мы имеем в виду многие блестящие результаты, такие, как теорема Брианшона (§ 9 гл. 3), теорема Фейербаха (§ 6 гл. 5), теорема Петерсона —

Шута (§ 8 гл. 4) и теорема Морлея (§ 9 гл. 2). Как известно из истории, Евклид писал для зрелых людей, которые готовились изучать философию. И вплоть до нашего столетия одной из основных причин обучения геометрии было то, что ее аксиоматический метод считался лучшим введением в дедукцию. Естественно, что на этот формальный метод делался акцент в процессе обучения. Однако ни древние, ни современные геометры не боялись использовать менее ортодоксальные методы, когда это их устраивало. Если методы тригонометрии, аналитической геометрии или векторные методы подойдут, геометры их используют. Кроме того, они создали свои собственные современные методы, элегантные и мощные. Один из них — применение *преобразований* таких, как поворот, симметрия и подобие, что дало возможность доказать ряд теорем более рациональным способом, а также связать геометрию с кристаллографией и искусством. Этому «динамическому» аспекту геометрии посвящена глава 4. Другим является метод *инверсивной геометрии*, рассматривающий точки и окружности, при этом и прямая считается окружностью, проходящей через бесконечно удаленную точку. О некоторых особенностях этой геометрии рассказывается в главе 5. И, наконец, третий — метод *проективной геометрии*, который совсем не рассматривает расстояния и углы, а выделяет аналогию между точками и прямыми. В проективной геометрии не только через любые две точки проходит прямая, но и любые две прямые имеют точку пересечения; при этом параллельные прямые пересекаются на «бесконечно удаленной прямой». Изложению небольшого фрагмента этой темы посвящена глава 6.

Геометрия и сейчас обладает всеми теми достоинствами, за которые ее ценили педагоги прошлых поколений. На свете еще есть геометрия, которая ждет,

чтобы ее познали и оценили. Геометрия (особенно проективная геометрия) остается отличным средством введения учащихся в аксиоматику. Геометрия сохранила всегда присущую ей эстетическую привлекательность, и не поблекла красота ее результатов. Более того, для специалистов в чистой и прикладной математике геометрия стала еще более полезной и необходимой, чем она была когда-либо раньше. Возьмите, например, формы орбит искусственных спутников и четырехмерную геометрию пространства-времени.

Геометрия росла. На протяжении веков были разработаны новые понятия и методы, которые будут для учащихся интересными и удивительными, если мы приложим все усилия, чтобы донести до них эти понятия. Так давайте же вновь перелистаем Евклида, познакомимся с некоторыми новыми результатами. Возможно, мы снова сможем испытать тот же восторг и трепет, как и при первых встречах с геометрией.

Авторы приносят искреннюю благодарность доктору Аннелии Лакс за ее терпеливое сотрудничество и многие полезные предложения.

Г. С. М. Коксетер
С. Л. Грейтцер

Торонто и Нью-Йорк, 1967

Глава 1

ТОЧКИ И ЛИНИИ, СВЯЗАННЫЕ С ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Обладая литературой более обширной, чем алгебра и арифметика вместе взятые, и по крайней мере столь же обширной как и анализ, геометрия в большей степени, чем любой другой раздел математики, является богатейшей сокровищницей интереснейших, но полузабытых вещей, которыми спешащее поколение не имеет времени насладиться.

Е. Т. Белл

Цель этой главы состоит в том, чтобы вспомнить некоторые из тех полузабытых вещей, к которым отсылал доктор Белл, вывести новые теоремы, появившиеся после Евклида, и применить все это к интересным ситуациям. Мы рассматриваем произвольный треугольник и самые знаменитые связанные с ним точки и линии: центр описанной окружности, медианы, центроид, биссектрисы углов, центр вписанной окружности, центры вневписанных окружностей, высоты, ортоцентр, прямую Эйлера и окружность девяти точек.

Изучение биссектрис углов естественно подводит нас к теореме Штейнера — Лемуса, которая сотни лет считалась трудной для доказательства, хотя, как мы видим сейчас, ее довольно легко доказать.

Наконец, по треугольнику и точке P, находящейся в общем положении, мы получаем новый треугольник, вершины которого являются основаниями перпендикуляров из точки P к сторонам данного треугольника. Эта идея приводит к занимательным результатам, с некоторыми из них мы встретимся в следующей главе.

§ 1. Обобщенная теорема синусов

Теорема синусов — это тригонометрическая теорема, которой мы будем часто пользоваться. К сожалению, она обычно появляется в учебниках в урезанной форме, и в этом виде она не приносит всей той пользы, которую могла бы дать обобщенная теорема. Поэтому

мы позволим себе доказать теорему синусов в желательной для нас форме.

Мы начинаем с треугольника ABC (обозначенного обычным способом) и описываем вокруг него окружность с центром в точке O и радиусом R, как показано на рисунках 1 и 2. Проведем диаметр CJ и хорду BJ. В обоих случаях $\angle CBJ$ — прямой, так как он вписан в полукруг. Следовательно, на обоих рисунках

$$\sin \hat{J} = \frac{a}{|CJ|} = \frac{a}{2R}.$$

На рисунке 1 $\hat{J} = \hat{A}$, поскольку углы J и A опираются на одну и ту же дугу окружности. На рисунке 2

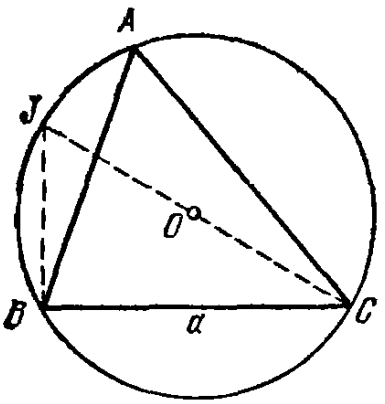


Рис. 1.

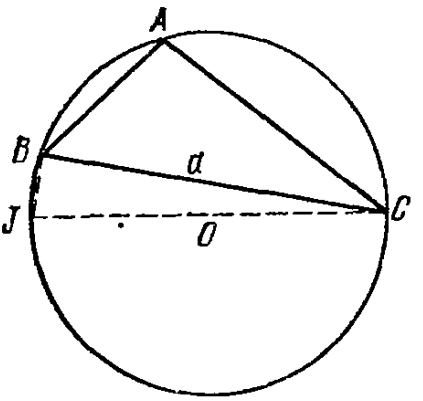


Рис. 2.

$\hat{J} = 180° - \hat{A}$, потому что противоположные углы вписанного четырехугольника являются дополнительными. Вспоминая, что $\sin \theta = \sin(180° - \theta)$, получим, что в обоих случаях $\sin \hat{J} = \sin \hat{A}$, следовательно, $\sin \hat{A} = a/2R$, т. е.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R.$$

Та же самая процедура, примененная к другим углам треугольника ABC, дает

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R, \quad \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

Объединяя результаты, мы можем сформулировать обобщенную теорему синусов следующим образом:

Теорема 1.11. *Для треугольника ABC с радиусом описанного круга R выполнены соотношения:*

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

Упражнения

1. Покажите, что*) для любого треугольника ABC, даже если угол B или C тупой, $a = b\cos \hat{C} + c\cos \hat{B}$. Используйте теорему синусов для вывода «формулы сложения»

$$\sin(\hat{B} + \hat{C}) = \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cdot \cos \hat{B}.$$

2. В любом треугольнике ABC

$$a(\sin \hat{B} - \sin \hat{C}) + b(\sin \hat{C} - \sin \hat{A}) + c(\sin \hat{A} - \sin \hat{C}) = 0.$$

3. В любом треугольнике ABC $S_{ABC} = abc/4R$.

4. Пусть p и q — радиусы двух окружностей, проходящих через точку A и касающихся стороны BC в точках B и C соответственно. Тогда $pq = R^2$.

§ 2. Теорема Чевы

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне, называется *чевианой*. Таким образом, если в треугольнике ABC X, Y и Z — точки, лежащие на сторонах BC, CA, AB соответственно, то отрезки AX, BY, CZ являются чевианами. Этот термин происходит от имени итальянского математика Джованни Чевы, который в 1678 году опубликовал следующую очень полезную теорему:

Теорема 1.21. *Если три чевианы AX, BY, CZ (по одной из каждой вершины) треугольника ABC конкурентны, то*

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1.$$

Когда мы говорим, что три прямые (или отрезка) *конкурентны*, то мы имеем в виду, что все они проходят через одну точку, которую обозначим через P. Для доказательства теоремы Чевы вспомним, что

*) В следующих упражнениях для экономии места мы опускаем слова «Покажите, что» или «Докажите, что». Таким образом, каждое упражнение, появляющееся в форме теоремы, нужно доказать.

площади треугольников с равными высотами пропорциональны основаниям треугольников. Ссылаясь на рисунок 3, мы имеем:

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{ABX}}{S_{AXC}} = \frac{S_{PBX}}{S_{PXC}} = \frac{S_{ABX} - S_{PBX}}{S_{AXC} - S_{PXC}} = \frac{S_{ABP}}{S_{CAP}}.$$

Аналогично,

$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}, \quad \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{CAP}}{S_{BCP}}.$$

Теперь, если мы перемножим их, то получим

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{S_{ABP}}{S_{CAP}} \cdot \frac{S_{BCP}}{S_{ABP}} \cdot \frac{S_{CAP}}{S_{BCP}} = 1.$$

Теорема, обратная к этой теореме, также верна:

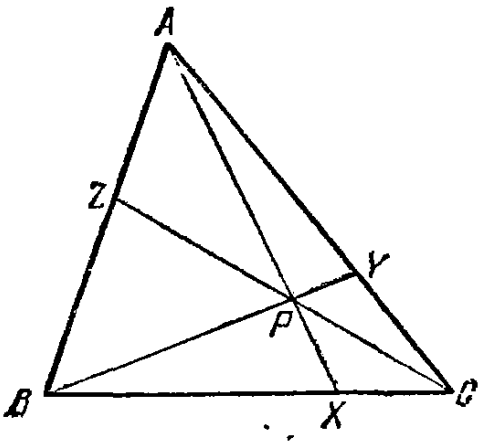


Рис. 3.

Теорема 1.22. *Если три чевианы AX, BY, CZ удовлетворяют соотношению*

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1,$$

то они конкурентны.

Чтобы это показать, предположим, что две первые чевианы пересекаются в точке P, как и прежде, а третья чевиана, проходящая через точку P, будет CZ'. Тогда, по теореме 1.21,

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ'|}{|Z'B|} = 1.$$

Но по предположению

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{|AZ'|}{|Z'B|} = \frac{|AZ|}{|ZB|},$$

точка Z' совпадает с точкой Z, и мы доказали, что отрезки AX, BY и CZ конкурентны ([13], стр. 54 и [42], стр. 48, 317).

Упражнения

1. Если X, Y, Z — середины сторон, то соответствующие им три чевианы конкурентны.

2. Чевианы, перпендикулярные противоположным сторонам, конкурентны.

3. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два неконгруэнтных треугольника, соответствующие стороны которых параллельны, как на рисунке 4. Тогда три прямые AA', BB', CC' конкурентны. (Такие треугольники называются *гомотетичными*. Мы рассмотрим их далее, в § 7 гл. 4.)

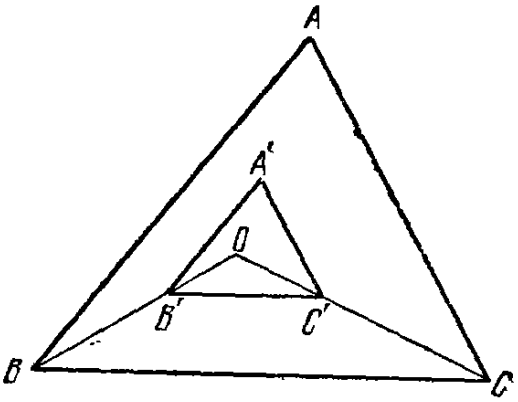


Рис. 4.

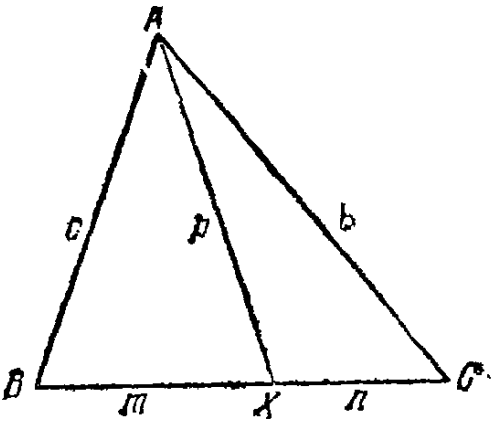


Рис. 5.

4. Пусть AX — чевиана длины p, причем $|BX| = m$ и $|XC| = n$, как на рисунке 5. Тогда

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

Указание. Сложите выражения для косинусов двух дополнительных углов в точке x через стороны треугольников ABX и CAX соответственно. Этот результат называется *теоремой Стюарта* в честь М. Стюарта, который сформулировал ее в 1746 году. Возможно, что она была открыта Архимедом около 300 г. нашей эры, но первое известное доказательство было дано Р. Симсоном в 1751 году.

§ 3. Замечательные точки

Существует много специальных точек и линий, связанных с треугольником, но нам придется ограничиться только небольшим их числом. Мы уже упоминали одну такую точку — *центр окружности, описанной вокруг треугольника*. Мы условимся обозначать ее буквой O. Она является точкой пересечения трех перпендикуляров, делящих пополам стороны треугольника (рис. 6). Радиус описанной окружности был уже обозначен буквой R.

Чевианы, которые связывают вершины треугольника с серединами противоположных сторон, называются *медианами*. На рисунке 7 отрезки AA', BB' и CC' — медианы, так что $|BA'|=|A'C|$, $|CB'|=|B'A|$ и $|AC'|=|C'B|$. Применяя теорему 1.21, мы делаем вывод, что медианы конкурентны. Их общая точка G называется *центроидом* треугольника. Если бы треугольник был вырезан из однородного материала, то он оставался бы в равновесии, будучи подвешенным

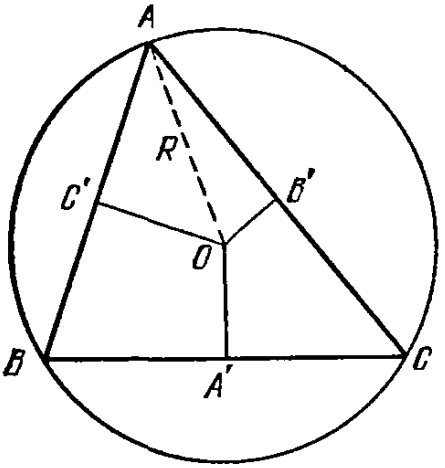


Рис. 6.

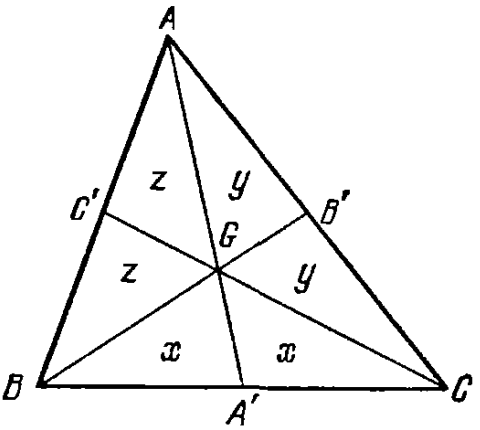


Рис. 7.

в этой точке. Другими словами, центроид есть «центр тяжести» треугольника.

Рассмотрев вновь рисунок 7, мы обнаруживаем, что $S_{GBA'}=S_{GA'C}$, так как эти треугольники имеют одинаковые основания и одну и ту же высоту. Вот почему на рисунке мы обозначили эти площади одной и той же буквой x. Из тех же соображений мы имеем

$$S_{GCB'}=S_{GB'A} \quad \text{и} \quad S_{GAC'}=S_{GC'B}.$$

Поэтому обозначим эти площади через y и z, как и показано. Однако мы также имеем $S_{CAC'}=S_{CC'B}$, т. е. $2y+z=z+2x$, следовательно, $x=y$. Аналогично, $S_{ABA'}=S_{AA'C}$, следовательно, $y=z$. Таким образом, мы показали, что $x=y=z$, а это есть

Теорема 1.31. *Треугольник делится своими медианами на шесть меньших треугольников равной площади.*

Продолжая наше рассмотрение рисунка 7, мы отмечаем, что $S_{GAB}=2S_{GBA'}$. Так как эти треугольники

имеют общую высоту, то отсюда следует, что $|AG| = 2|GA'|$. Аналогично, $|BG| = 2|GB'|$ и $|CG| = 2|GC'|$, т. е. имеет место:

Теорема 1.32. *Медианы треугольника делят одна другую в отношении* 2 : 1. *Другими словами, каждая медиана треугольника отсекает треть другой.*

Чевианы AD, BE, CF (рис. 8), перпендикулярные прямым BC, CA, AB, соответственно, называются *высотами* треугольника ABC. Как мы видели в упраж-

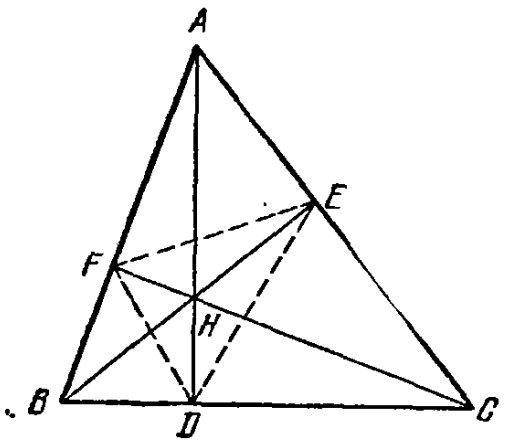


Рис. 8.

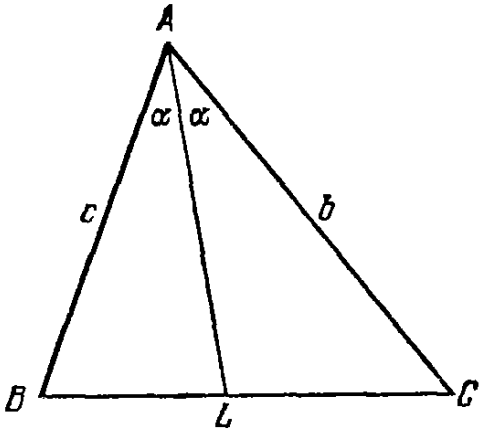


Рис. 9.

нении 2 § 2, теорема, обратная теореме Чевы, устанавливает их конкурентность. Их общая точка H называется *ортоцентром* *).

Сами точки D, E, F называются *основаниями* высот. Соединяя их попарно, мы получим треугольник DEF — *ортотреугольник* треугольника ABC.

Другое важное семейство чевиан образуют биссектрисы внутренних углов. На рисунке 9 показана одна такая биссектриса AL. Применяя теорему 1.11 к двум треугольникам ABL и ALC (углы которых в точке L, являясь дополнительными, имеют равные синусы), мы получаем

$$\frac{|BL|}{\sin\frac{1}{2}\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{L}}, \qquad \frac{|LC|}{\sin\frac{1}{2}\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{L}}.$$

Следовательно,

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{c}{b}.$$

*) Историю этого термина см. J. Satterly, Mathematical Gazette 45 (1965), стр. 51.

Так как мы можем получить аналогичные результаты для биссектрис внутренних углов B и C, то мы таким образом доказали

Теорему 1.33. *Каждая биссектриса внутреннего угла в треугольнике делит противоположную сторону на отрезки, длины которых пропорциональны длинам прилегающих сторон.*

Любая точка на прямой AL (рис. 9) равноудалена от прямых CA и AB. Аналогично, любая точка на биссектрисе внутреннего угла B равноудалена от прямых AB и BA. Следовательно, точка I, в которой эти две биссектрисы пересекаются, находится на равных расстояниях r от всех трех сторон:

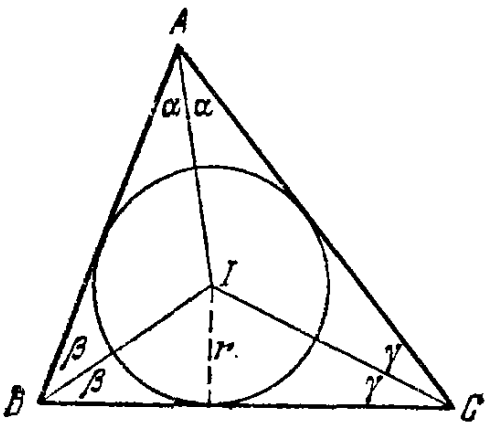


Рис. 10.

Теорема 1.34. *Биссектрисы трех внутренних углов треугольника конкурентны.*

Окружность с центром в точке I и радиуса r (рис. 10) касается всех трех сторон и поэтому является *вписанной окружностью.*

Упражнения

1. Центр описанной окружности и ортоцентр тупоугольного треугольника лежат вне этого треугольника.

2. Найдите отношение площадей данного треугольника и треугольника, стороны которого имеют те же длины, что и медианы данного.

3. Любой треугольник, имеющий две равные медианы, является равнобедренным.

4. Любой треугольник, имеющий две равные высоты, является равнобедренным.

5. Используя теоремы 1.22 и 1.33, получите другое доказательство теоремы 1.34.

6. Выразите длину медианы AA' (рис. 7) через a, b, c.

Указание. Используйте теорему Стюарта (упражнение 4 § 2).

7. Квадрат длины биссектрисы AL (рис. 9) равен

$$bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right].$$

8. Найдите длину биссектрисы прямого угла треугольника со сторонами 3, 4, 5.

9. Произведение длин двух сторон треугольника равно произведению длины диаметра описанной окружности на длину высоты, опущенной на третью сторону.

§ 4. Вписанная и вневписанные окружности

На рисунке 11 изображена вписанная окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y, Z. Так как две касательные к окружности, проведенные из внешней точки, равны, то мы получаем, что $|AY|=|AZ|$, $|BZ|=|BX|$, $|CX|=|CY|$.

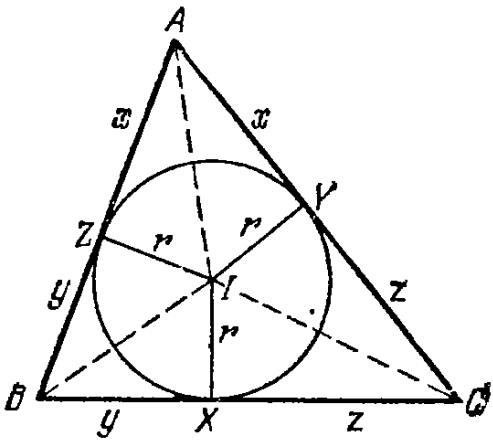


Рис. 11.

На рисунке 11 длины этих отрезков обозначены буквами x, y, z, так что

$$y+z=a,\quad z+x=b,$$

$$x+y=c.$$

Складывая эти равенства и используя введенное Эйлером обозначение s для полупериметра (от «semiperimeter»), получим

$$2x+2y+2z=a+b+c=2s,$$

поэтому

$$x+y+z=s,$$

т. е. справедлива

Теорема 1.41. $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$.

Так как треугольник IBC имеет основание a и высоту r, то его площадь равна $S_{IBC}=\frac{1}{2}ar$. Прибавив к нему аналогичные выражения для S_{ICA} и S_{IAB}, мы получим $\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$; следовательно, доказана

Теорема 1.42. $S_{ABC}=sr$.

На рисунке 12 изображен треугольник $I_aI_bI_c$, стороны которого являются биссектрисами внешних углов треугольника ABC. Любая точка на биссектрисе I_cI_a угла B равноудалена от прямых AB и BC. Аналогично, любая точка на прямой I_aI_b равноудалена от

прямых BC и CA. Следовательно, точка I_a, в которой эти биссектрисы пересекаются, находится на одинаковом расстоянии r_a от всех трех сторон. Так как I_a равноудалена от сторон AB и AC, то она должна принадлежать множеству точек, равноудаленных от этих прямых, т. е. она должна лежать на прямой AI, внутренней биссектрисе угла A:

Теорема 1.43. *Внешние биссектрисы любых двух углов треугольника конкурентны с внутренней биссектрисой третьего угла.*

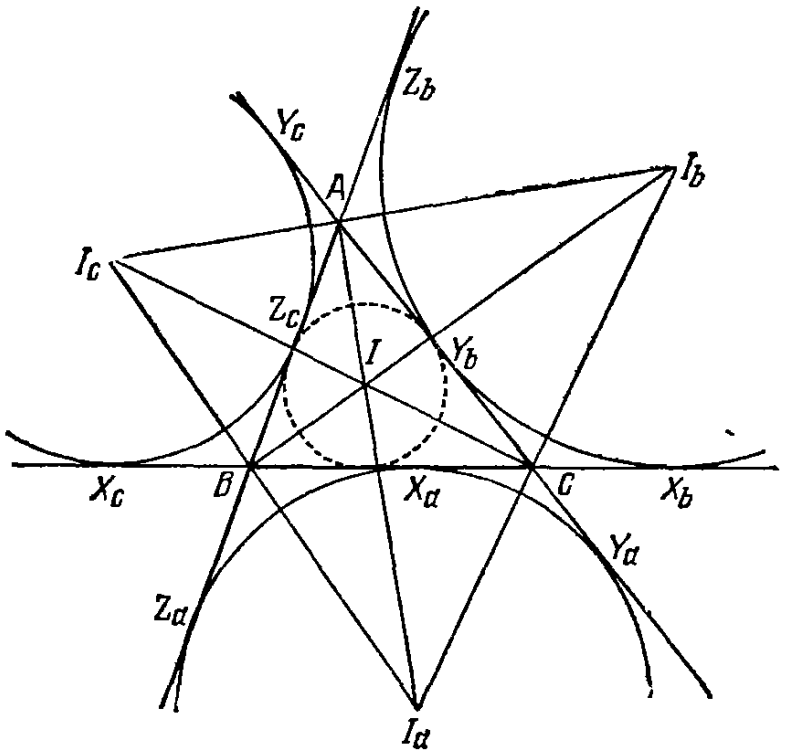


Рис. 12.

Окружность с центром в точке I_a радиуса r_a, касающаяся всех трех сторон треугольника, является одной из трех *вневписанных окружностей.* Каждая из вневписанных окружностей касается одной из сторон треугольника внутри, а двух других сторон (продолженных) извне.

Обозначив точки касания как на рисунке 12, мы замечаем, что так как две касательные из одной точки к окружности имеют одинаковые длины, то

$$|BX_b| = |BZ_b|$$

и

$$|BX_b|+|BZ_b|=|BC|+|CX_b|+|Z_bA|+|AB|=$$
$$=|BC|+|CY_b|+|Y_bA|+|AB|=a+b+c=2s.$$

Следовательно, касательная из точки B (или любой другой вершины) к вневписанной окружности, расположенной за противолежащей стороной, имеет длину s. Действительно,

$$|AY_a|=|AZ_a|=|BZ_b|=|BX_b|=|CX_c|=|CY_c|=s.$$

Кроме того, так как $|CX_b| = |BX_b| - |BC| = s-a$ и т. д., то также и

$$|BX_c|=|BZ_c|=|CX_b|=|CY_b|=s-a,$$
$$|CY_a|=|CX_a|=|AY_c|=|AZ_c|=s-b,$$
$$|AZ_b|=|AY_b|=|BZ_a|=|BX_a|=s-c.$$

Упражнения

1. Если три окружности с центрами в точках A, B, C попарно касаются, то их радиусы равны $s-a$, $s-b$, $s-c$.
2. $abc = 4srR$ (s, r, R имеют их обычные значения).
3. Чевианы AX, BY, CZ треугольника ABC, где X, Y, Z — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника, конкурентны. (Их общая точка называется *точкой Жергона* треугольника ABC.)
4. Треугольник ABC является ортотреугольником треугольника $I_aI_bI_c$ (рис. 12).
5. $S_{\triangle ABC} = (s-a)\,r_a = (s-b)\,r_b = (s-c)\,r_c$ (ср. теорему 1.42).
6. $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{1}{r}$.

§ 5. Теорема Штейнера — Лемуса

Существует ряд геометрических задач, которые околдовывают каждого, кто по воле случая сталкивается с ними. По-видимому, это было характерно для геометрии даже в древнее время. Стоит только вспомнить три знаменитые задачи древности — удвоение куба, трисекцию угла и квадратуру круга. Попытки решить эти задачи привели к развитию новых ветвей математики. Даже сейчас существуют псевдоматематики, которые присылают в редакции «решения» этих

задач и требуют публикации или доказательства ложности своих «решений».

Одна всегда возбуждавшая интерес теорема может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 1.51. *Любой треугольник, у которого равны длины биссектрис двух углов (измеряемые от вершины до противоположной стороны), является равнобедренным.*

Эта теорема была послана великому шведскому геометру Якобу Штейнеру в 1840 году С. Л. Лемусом (имя которого, если бы не этот случай, было бы давно забыто) с просьбой дать чисто геометрическое доказательство. Штейнер дал довольно сложное доказательство, которое вдохновило многих других на поиски более простых методов. Работы по теореме Штейнера — Лемуса появлялись в различных журналах в 1842, 1844, 1848 годах и почти каждый год с 1854 года по 1864 год, а также в большом количестве и в течение следующего столетия.

Одно из простейших доказательств опирается на следующие две леммы:

Лемма 1.511. *Если две хорды окружности стягивают различные острые углы с вершинами на этой окружности, то меньшему углу соответствует меньшая хорда.*

Доказательство. Две равные хорды стягивают равные углы с вершиной в центре окружности и равные углы (как их половины) с вершинами в соответствующих точках на окружности. Из двух неравных хорд более короткая, находясь дальше от центра, стягивает меньший угол с вершиной в центре и, следовательно, меньший острый угол с вершиной на окружности.

Лемма 1.512. *В треугольнике с двумя различными углами меньший угол обладает большей биссектрисой* ([22], стр. 72).

Доказательство. Пусть ABC — треугольник, в котором $\hat{B} < \hat{C}$, как на рисунке 13; пусть отрезки BM и CN делят пополам углы B и C. Мы хотим доказать, что $|BM| > |CN|$. Возьмем точку M' на отрезке BM так, чтобы $\widehat{M'CN} = \frac{1}{2}\hat{B}$. Так как этот угол

равен углу $M'BN$, то четыре точки N, B, C, M' лежат на одной окружности. Поскольку

$$\hat{B} < \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) < \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}),$$

то

$$\widehat{CBN} < \widehat{M'CB} < 90°.$$

По лемме 1.511 $|CN| < |M'B|$. Следовательно, $|BM| > |BM'| > |CN|$.

Доказательство теоремы. Часто случается, что теорема может быть выражена в форме «противоположной к обратной» — эквивалентной первоначальной. Например, вместо того, чтобы сказать: «*Все люди смертны*», мы можем также сказать «*Бессмертные не есть люди*». Вместо доказательства самой теоремы 1.51 для нас будет достаточно доказать, что если в треугольнике ABC $\hat{B} \neq \hat{C}$, то $|BM| \neq |CN|$. Но это есть прямое следствие леммы 1.512.

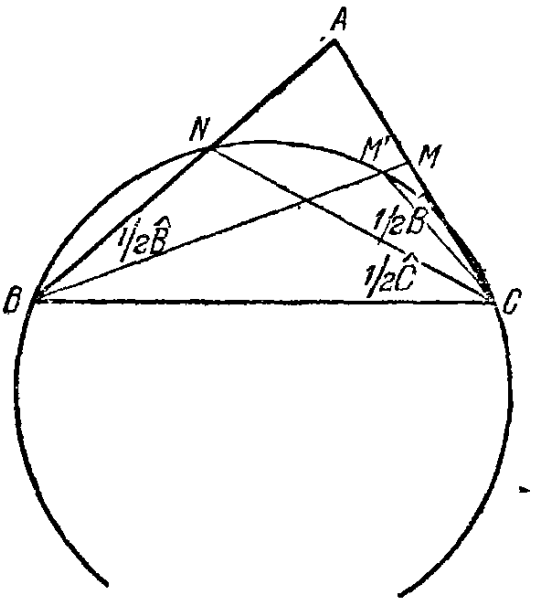


Рис. 13.

Вышеприведенное доказательство этой леммы имеет занятную историю. Оно было придумано двумя английскими инженерами Г. Джильбертом и Д. Мак-Доннеллом и опубликовано в American Mathematical Monthly 7 (1963), стр. 79—80, со следующим редакционным примечанием:

«Мартин Гарднер в своем обзоре книги Коксетера «Введение в геометрию» (Scientific American 204 (1961), стр. 166—168) описал эту знаменитую теорему столь интересно, что сотни читателей прислали ему свои доказательства. Он взял на себя труд по обработке этого громадного материала и совершенствовал его до тех пор, пока не заблистала, очищенная от наслоений, жемчужина, которую мы приводим здесь.»

Некоторые читатели могут испытать чувство неудовлетворенности потому, что доказательство Джильберта и Мак-Доннелла, подобно большинству других (например, [22], стр. 73 [17], стр. 32), является косвенным: вместо самой теоремы Штейнера — Лемуса они доказывают теорему, противоположную к обратной (лемма 1.512). Было предложено несколько якобы прямых доказательств (например, [17], стр. 589 и [42], стр. 31, 249); но каждое из них в действительности является в скрытой форме косвенным. Это несложно понять, если вспомнить, что практически только самые элементарные теоремы доказываются полностью. Все остальные доказываются с помощью других, уже известных теорем, которые выстраиваются в ряд, ведущий к аксиомам. Нельзя, строго говоря, утверждать, что некое доказательство — прямое, если хоть одна из этих вспомогательных теорем имеет косвенное доказательство. Более того, некоторые из самых простых и самых основных теорем имеют косвенные доказательства; следовательно, если бы мы настаивали на абсолютно прямом доказательстве, то существующее великое множество теорем свелось бы к небольшому числу тривиальных. Стоит ли об этом сожалеть? Великий английский математик Г. Харди говорил по этому поводу ([40], стр. 34):

«Reductio ad absurdum *), столь любимое Евклидом, является тончайшим инструментом математика. Оно является намного более тонким гамбитом, чем любой шахматный гамбит: шахматист может предложить в жертву пешку или другую фигуру, а математик предлагает в жертву всю игру.»

Упражнения

1. В треугольнике ABC даны величины углов $B = 12°$, $C = 132°$. Проведены внешние биссектрисы BM и CN этих углов до пересечения с продолжениями противоположных сторон. Сравните длины этих биссектрис, не используя тригонометрические функции (О. Боттема) **).

---

*) Приведение к абсурду (лат.). — *Прим. перев.*

**) См. Archibald Henderson, Scripta Mathematica 21 (1956), стр. 309—310.

2. Где доказательство теоремы 1.51 нарушается, если мы попытаемся применить его к внешним биссектрисам треугольника Боттемы (в котором, как каждый согласится, $B < C$)?

3. Используйте упражнение 7 § 3 для получения «прямого» доказательства теоремы Штейнера — Лемуса.

§ 6. Ортотреугольник

Можно многое узнать, исследуя рисунок 14, на котором изображены остроугольный треугольник ABC, центр O описанной вокруг него окружности, ортоцентр H и ортотреугольник DEF. Объясним, почему мы обозначили несколько углов на рисунке одним и тем же символом α, имеющим значение $90° - \hat{A}$. Во-первых, так как треугольник $OA'C$ подобен треугольнику JBC, изображенному на рисунке 1, то $\widehat{A'OC} = \hat{A}$. Таким образом, величина каждого из углов при основании равнобедренного треугольника OBC равна $90° - \hat{A}$. Из прямоугольных треугольников ABE и ACF мы получаем те же значения для углов EBA и ACF. Равенство последних двух углов можно было бы увидеть из того факта, что четырехугольник $BCEF$ является вписанным, так как углы BEC и BFC — прямые. Аналогично, используя четырехугольники $BDHF$ и $CEHD$, мы находим, что

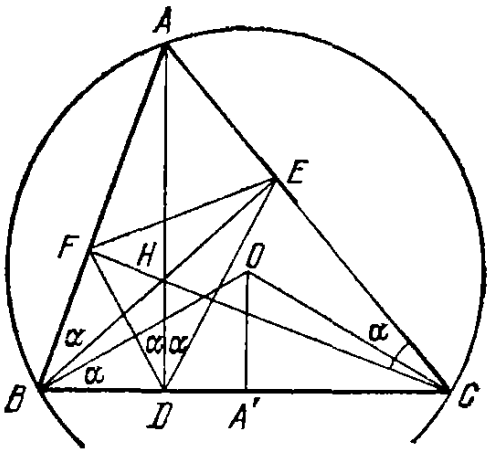


Рис. 14.

$$\widehat{HDF} = \widehat{HBF} = \widehat{EBF} = \widehat{ECF} = \widehat{ECH} = \widehat{EDH}.$$

Таким образом, отрезок HD является биссектрисой угла EDF.

Из тех же соображений получаем, что отрезок HE делит пополам угол FED, а отрезок HF — угол DFE. Поэтому мы можем сформулировать следующий весьма интересный результат: высоты в треугольнике являются биссектрисами его ортотреугольника. Этот результат можно иначе записать в следующем виде:

Теорема 1.61. *Ортоцентр остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в его ортотреугольник.*

Мы уже отметили на рисунке 14, что $\widehat{HDF} = \widehat{DBO}$ А так как отрезок HD перпендикулярен отрезку DB, то и отрезок FD должен быть перпендикулярен отрезку OB. Аналогично показывается перпендикулярность отрезков DE и OC, а также EF и OA.

Упражнения

1. $\triangle AEF \backsim \triangle DBF \backsim \triangle DEC \backsim \triangle ABC$ (рис. 14).
2. Нарисуйте другой вариант рисунка 14, в котором угол при вершине A — тупой. Какое из вышеприведенных заключений должно быть изменено?
3. Ортоцентр тупоугольного треугольника является центром вневписанной окружности к ортотреугольнику.
4. $\widehat{HAO} = |\hat{B} - \hat{C}|$.

§ 7. Серединный треугольник и прямая Эйлера

Треугольник, полученный соединением середин сторон данного треугольника, назовем *серединным треугольником.* На рисунке 15 треугольник $A'B'C'$ есть серединный треугольник треугольника ABC. Рассмотрим также две медианы AA' и BB', пересекающиеся в точке G, две высоты треугольника ABC, пересекающиеся в точке H, и две высоты треугольника $A'B'C'$, пересекающиеся в точке O. Поразительно, как много можно обнаружить, лишь изучая этот рисунок.

Во-первых, стороны треугольника $A'B'C'$ параллельны сторонам треугольника ABC, поэтому эти треугольники подобны. Далее, $|C'B'| = \frac{1}{2}|BC|$, поэтому отношение длин любых двух соответствующих отрезков (а не только соответствующих сторон) будет равно 1 : 2. В действительности, отрезки $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ разбивают треугольник ABC на четыре конгруэнтных треугольника. Кстати, точка P — середина отрезка $B'C'$ — также является и серединой отрезка AA'.

Далее мы видим, что $AC'A'B'$ — параллелограмм, следовательно, прямая AA' делит пополам отрезок $B'C'$. Поэтому медианы треугольника $A'B'C'$ лежат на

медианах треугольника ABC, а это означает, что оба треугольника имеют один и тот же центроид G.

Высоты треугольника $A'B'C'$, изображенные нами на рисунке, являются серединными перпендикулярами сторон AB и BC треугольника ABC. Отсюда мы делаем вывод, что точка O — ортоцентр треугольника $A'B'C'$ — является в то же время и центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Так как точка H — ортоцентр треугольника ABC, а точка O — ортоцентр подобного ему треугольника

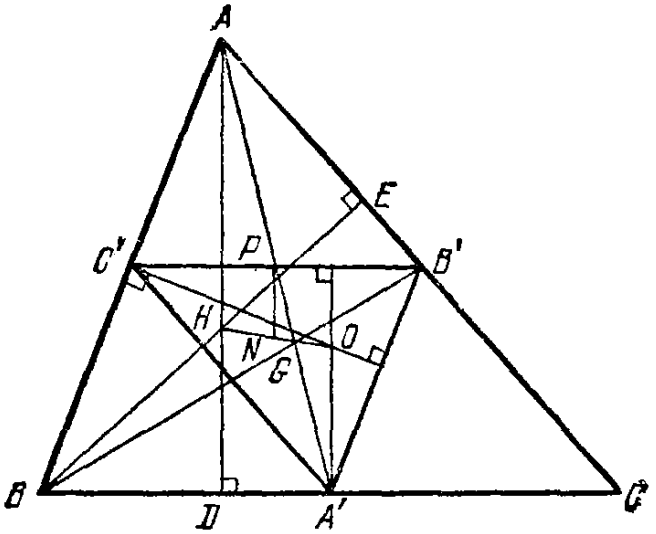


Рис. 15.

$A'B'C'$, то $|AH| = 2|OA'|$. Вспомним, что по теореме 1.32 $|AG| = 2|GA'|$. И, наконец, так как оба отрезка, AD и OA', перпендикулярны стороне BC, то они параллельны. Следовательно,

$$\widehat{HAG} = \widehat{OA'G}, \quad \triangle HAG \sim \triangle OA'G,$$

и

$$\widehat{AGH} = \widehat{A'GO}.$$

Этим показано, что точки O, G, H коллинеарны *) и $|HG| = 2|GO|$, т. е. справедлива

Теорема 1.71. *Ортоцентр, центроид и центр описанной окружности произвольного треугольника лежат на одной прямой. Центроид делит расстояние от*

*) Точки называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой. — *Прим. перев.*

ортоцентра до центра описанной окружности в отношении 2 : 1.

Прямая, на которой лежат эти три точки, называется *прямой Эйлера* этого треугольника.

Давайте изучим рисунок 15 более тщательно. Мы отметили точку N, где прямая Эйлера HO пересекает прямую, проходящую через точку P перпендикулярно отрезку $B'C'$. Все три прямые AH, PN и $A'O$, перпендикулярные к отрезку $B'C'$, параллельны. Так как $|AP| = |PA'|$, то прямая PN равноудалена от прямых AH и $A'O$. Следовательно, точка N — середина отрезка HO.

До сих пор в наших рассуждениях фигурировала сторона $B'C'$ треугольника $A'B'C'$. Если мы проведем те же рассуждения, но применительно к какой-либо другой стороне этого треугольника, то отрезок HO останется тем же, и он будет делиться пополам серединным перпендикуляром к новой стороне. Так как у отрезка HO только одна середина, то мы можем утверждать, что серединные перпендикуляры всех трех сторон треугольника $A'B'C'$ будут проходить через точку N. Другими словами, точка N должна быть центром окружности, описанной вокруг треугольника $A'B'C'$.

Итак, центр окружности, описанной вокруг серединного треугольника, лежит в середине отрезка HO прямой Эйлера исходного треугольника. Кроме того, так как треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC, то радиус окружности, описанной вокруг серединного треугольника, равен половине радиуса окружности, описанной вокруг исходного треугольника.

Имя Эйлера появляется столь часто и в столь многих областях математики, что невозможно не сказать о нем несколько слов. Леонард Эйлер родился в 1707 году в г. Базеле (Швейцария). В 1727 году он был приглашен в Россию в Санкт-Петербургскую академию. В 1741 году он уехал в Берлин, чтобы получить кафедру математики Прусской академии. Он вернулся в Санкт-Петербург в 1766 году и оставался там вплоть до своей смерти в 1783 году.

Эйлер был неутомимым работником, его деятельность обогатила каждую область математики. Куда ни глянешь, всюду либо теорема Эйлера, либо фор-

мула Эйлера, либо метод Эйлера. Эйлер написал 473 мемуара, которые были опубликованы при его жизни, и еще 200, которые были опубликованы вскоре после его смерти, и еще 61 мемуар, которые были изданы позже. И все это несмотря на то, что в 1735 году он перестал видеть одним глазом, а в 1766 году обоими. Он обладал исключительным комбинаторным даром, и его интуитивное понимание математики было огромным. Мы еще не раз встретимся с его именем в этой книге.

Упражнения

1. Начертив новый вариант рисунка 15, основанный на рисунке 2 (вместо ранее использованного рисунка 1), проверьте, что наше доказательство теоремы 1.71 остается справедливым и для случая тупоугольности треугольника ABC.
2. $|OH|^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.
3. $|DA'| = |b^2 - c^2|/2a$.
4. Если треугольник ABC обладает тем свойством, что его прямая Эйлера параллельна стороне BC, то $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 3$.

§ 8. Окружность девяти точек

Чтобы облегчить восприятие дальнейшего, мы уберем некоторые линии на рисунке 15 и добавим несколько других; в результате получим рисунок 16. Рассмотрим внимательно новый чертеж, на котором K, L, M — середины отрезков AH, BH, CH, лежащих на высотах. Так как BC — общая сторона двух треугольников ABC и HBC, а точки C', B' и L, M являются серединами других их сторон соответственно, то отрезки $C'B'$ и LM параллельны прямой BC (а их длины равны половине длины отрезка BC). Аналогично, так как AH — общая сторона двух треугольников BAH и CAH, то оба отрезка $C'L$ и $B'M$ параллельны прямой AH (а их длины равны половине длины отрезка AH). Следовательно, $B'C'LM$ — параллелограмм. Так как отрезки BC и AH — перпендикулярны, то этот параллелограмм — прямоугольник. Аналогично, $A'B'KL$ — прямоугольник (как и $C'A'MK$). Следовательно, $A'K$, $B'L$, $C'M$ являются тремя диаметрами окружности, как показано на рисунке 17.

Так как $\angle A'DK$ — прямой, эта окружность (построенная на отрезке $A'K$, как на диаметре) проходит

через точку D. Точно также она проходит через точки E и F. Суммируя вышесказанное, получаем:

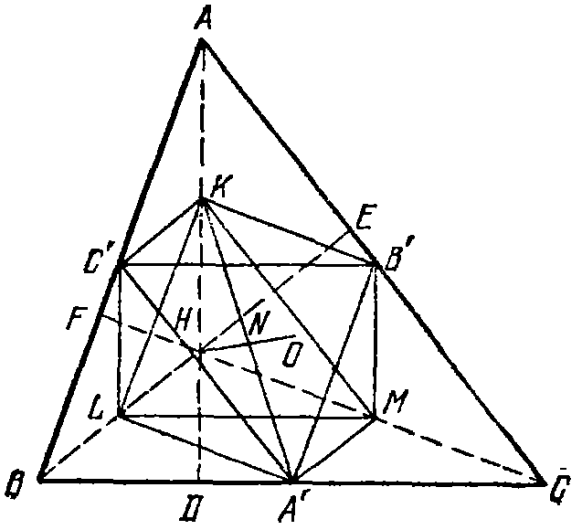


Рис. 16.

Теорема 1.81. *Основания трех высот произвольного треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих его вершины*

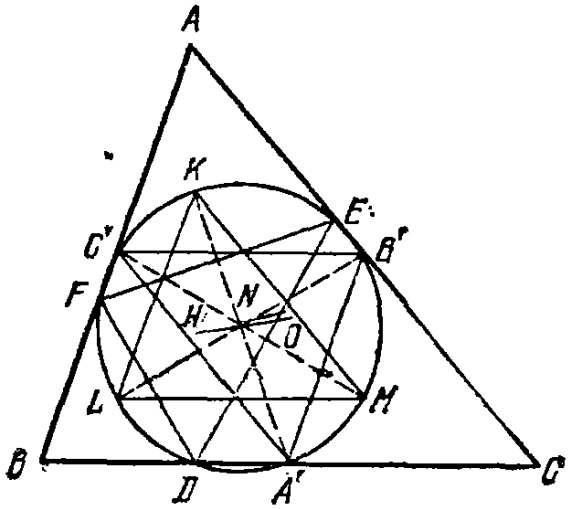


Рис. 17.

с ортоцентром, лежат все на одной окружности радиуса $\frac{1}{2}R$.

Следуя Ж. В. Понселе, мы называем ее *окружностью девяти точек* этого треугольника. Так как три точки K, L, M диаметрально противоположны точкам A', B', C', то каждый из двух треугольников KLM

или $A'B'C'$ может быть получен из другого поворотом на 180° вокруг центра этой окружности. Очевидно, что этот поворот, который меняет местами эти два конгруэнтных треугольника, должен также поменять местами и их ортоцентры H и O. Следовательно, центром окружности девяти точек является середина отрезка HO, которую уже ранее мы обозначили через N, имея в виду ее будущую роль *центра окружности девяти точек*. Другими словами:

Теорема 1.82. *Центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точно в середине отрезка между ортоцентром и центром описанной окружности.*

История этих двух теорем несколько запутана. Задача Б. Бивана, опубликованная в английском журнале в 1804 году, по-видимому, указывает на то, что эти теоремы уже тогда были известны. Иногда они ошибочно приписываются Эйлеру, который уже в 1765 году доказал, что *ортотреугольник и серединный треугольник имеют общую описанную окружность.* И в самом деле, европейские авторы часто называют эту окружность «окружностью Эйлера». По-видимому, первое полное доказательство было опубликовано в 1821 году Понселе. К. Фейербах переоткрыл частичный результат Эйлера еще позже и добавил новое свойство, которое является настолько замечательным, что побуждает многих авторов называть окружность девяти точек «окружностью Фейербаха». Теорема Фейербаха (которую мы докажем в § 6 гл. 5) утверждает, что *окружность девяти точек касается вписанной и всех вневписанных окружностей.*

Упражнения

1. Четырехугольник $AKA'O$ (см. рис. 16) — параллелограмм.
2. В окружности девяти точек (см. рис. 17) точки K, L, M делят пополам соответственно дуги EF, FD и DE.
3. Окружность, описанная вокруг треугольника ABC, является окружностью девяти точек треугольника $I_aI_bI_c$.
4. Пусть три конгруэнтные окружности имеют общую точку и пересекаются еще в трех точках A, B и C. Тогда радиус каждой из этих окружностей равен радиусу окружности, описанной вокруг треугольника ABC, и их общая точка является ортоцентром этого треугольника.
5. Окружность девяти точек пересекает стороны треугольника под углами $|B-C|$, $|C-A|$, $|A-B|$.

§ 9. Педальный треугольник

Ортотреугольник и серединный треугольник являются двумя примерами сопутствующих треугольников более общего типа. Пусть P — любая точка внутри данного треугольника ABC, и пусть перпендикуляры, опущенные из точки P на стороны BC, CA, AB треугольника будут PA_1, PB_1 и PC_1, как на рисунке 18. Треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания этих перпендикуляров, называется *педальным треугольником* треугольника ABC для «педальной точки» P. Требование, чтобы точка P находилась

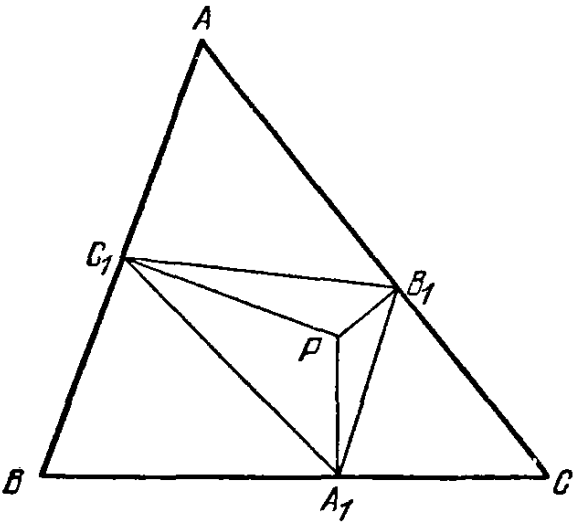


Рис. 18.

внутри треугольника, можно ослабить, запретив лишь точке P находиться на окружности, описанной вокруг треугольника ABC (по причинам, которые будут объяснены в § 5 гл. 2). Ясно, что если точка P — ортоцентр, то образуется ортотреугольник, а если она — центр описанной окружности, то образуется серединный треугольник.

Разберем рисунок 18 более детально. Прямые углы в точках C_1 и B_1 указывают на то, что эти точки лежат на окружности с диаметром AP; другими словами, точка P лежит на окружности, описанной вокруг треугольника AB_1C_1. Применив теорему синусов к этому треугольнику, а также к самому треугольнику ABC, мы получаем

$$\frac{|B_1C_1|}{\sin \widehat{A}} = |AP|, \quad \frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R,$$

откуда

$$|B_1C_1| = \frac{a|AP|}{2R}.$$

Аналогично,

$$|C_1A_1| = \frac{b|BP|}{2R} \quad \text{и} \quad |A_1B_1| = \frac{c|CP|}{2R}.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 1.91. *Если расстояния от педальной точки до вершин треугольника ABC равны x, y, z, то длины сторон педального треугольника равны*

$$\frac{ax}{2R}, \quad \frac{by}{2R}, \quad \frac{cz}{2R}.$$

Разумеется, в частном случае $x = y = z = R$ это утверждение общеизвестно.

Перейдем к одной очень интересной задаче, в которой рассматриваются педальные треугольники педальных треугольников. Она в то же самое время прекрасно демонстрирует роль воображения в геометрии. Эта задача, по-видимому, впервые появилась в 1892 году, когда она была добавлена редактором Ж. Нейбергом в шестое издание классического труда Джона Кейси «Продолжение первых шести книг Начал Евклида» *). На рисунке 19 внутренняя точка P использована для определения треугольника $A_1B_1C_1$ (первого) педального треугольника треугольника ABC. Та же самая педальная точка P снова использовалась для определения педального треугольника треугольника $A_1B_1C_1$, который мы обозначим через $A_2B_2C_2$ и, естественно, назовем «вторым педальным треугольником» треугольника ABC. Третья операция дает треугольник $A_3B_3C_3$ — педальный треугольник треугольника $A_2B_2C_2$. Мы подразумеваем, что и для «третьего педального треугольника» использовалась та же самая точка P. В этих терминах открытие Нейберга можно выразить следующим образом:

Теорема 1.92. *Третий педальный треугольник подобен исходному.*

Доказательство является удивительно простым. Оно легко следует из чертежа, стоит лишь соединить

*) J. Casey, A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid (6th ed.), Hodges Figgis, Dublin, 1892.

точки P и A. Если рассмотреть окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1, $A_2B_1C_2$, $A_3B_3C_2$, $A_2B_2C_1$ и $A_3B_2C_3$, то точка P принадлежит каждой из них, поэтому

$$\widehat{C_1AP} = \widehat{C_1B_1P} = \widehat{A_2B_1P} = \widehat{A_2C_2P} = \widehat{B_3C_2P} = \widehat{B_3A_3P}$$

и

$$\widehat{PAB_1} = \widehat{PC_1B_1} = \widehat{PC_1A_2} = \widehat{PB_2A_2} = \widehat{PB_2C_3} = \widehat{PA_3C_3}.$$

Другими словами, две части, на которые прямая AP делит угол A (обозначенные на чертеже одинарной и

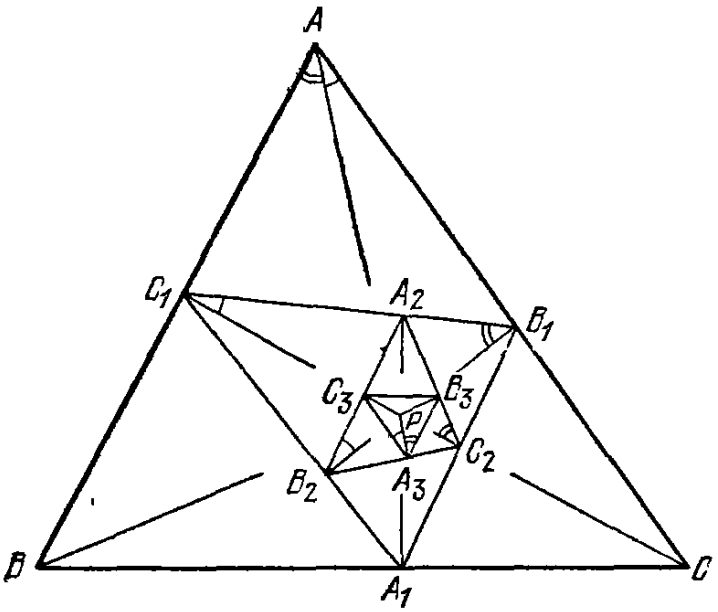


Рис. 19.

двойной дугами), имеют двойников: одна — при вершине B_1, а другая — при вершине C_1, далее — при вершинах C_2 и B_2 и, наконец, обе — при вершине A_3. Следовательно, треугольник ABC и треугольник $A_3B_3C_3$ имеют равные углы при вершинах A и A_3. Аналогично, они имеют равные углы при вершинах B и B_3. Таким образом, теорема доказана.

Интересно проследить на чертеже «шествие углов» из положения A в положение A_3 — столь же четкое, как и маневры вымуштрованной команды.

Это свойство продолжающихся педальных треугольников было обобщено доктором А. Оппенгеймом, проректором Малайского университета в Сингапуре.

Он установил, что *n-й педальный n-угольник любого n-угольника подобен первоначальному n-угольнику.* Довольно поучительно провести подобное построение для четвертого педального четырехугольника некоторого четырехугольника, проследив еще более длинное «шествие углов».

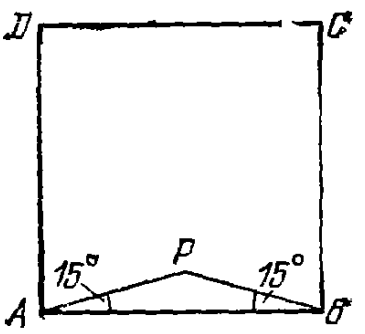


Рис. 20.

На этом месте мы прерываем наши исследования. Мы выполнили часть того, что намеревались сделать; начав с хорошо известных элементарных утверждений, мы выявили ряд простых, но важных фактов. Методы, описанные здесь, позволяют решить многие задачи. Некоторые из них — это широко известные трудные задачи, которые читатель, возможно, видел раньше. Мы хотим закончить эту главу пятью из этих неувядающих трудных задач.

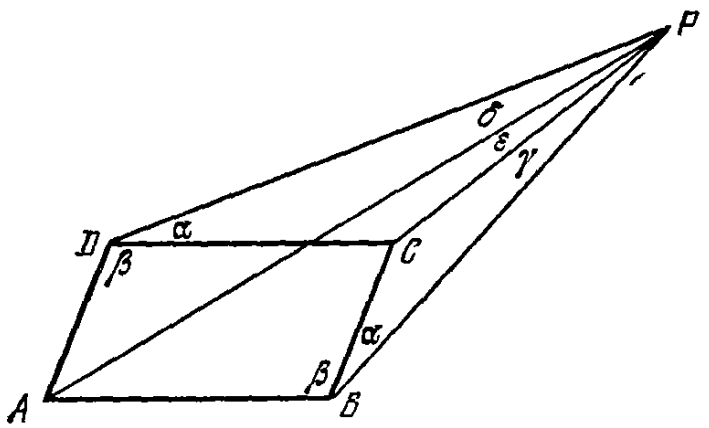


Рис. 21.

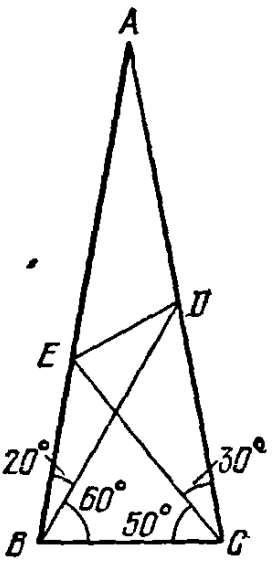


Рис. 22.

Упражнения

1 Если продолжение чевианы AQ равностороннего треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке P, то

$$\frac{1}{|PB|}+\frac{1}{|PC|}=\frac{1}{|PQ|}.$$

2 Если внутри квадрата $ABCD$ построен равнобедренный треугольник PAB с углами по 15° при основании AB, как на рисунке 20, то точки P, C, D являются вершинами равностороннего треугольника.

3. Если прямые PB и PD, проведенные вне параллелограмма $ABCD$, составляют равные углы со сторонами BC и DC соответственно, как на рисунке 21, то $\widehat{CPB} = \widehat{DPA}$. (Конечно, это плоский, а не пространственный чертеж.)

4. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с углами по 80° при вершинах B и C. Чевиана BD делит угол B на углы в 60° и 20°, а чевиана CE делит угол C на углы в 30° и 50°, как на рисунке 22. Найдите $\widehat{EDB}$.

5. Если две прямые, проходящие через одну из вершин равностороннего треугольника, делят полуокружность, построенную извне на противоположной стороне, на три равных дуги, то эти прямые делят саму сторону на три равных отрезка.

Глава 2

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ

Наряду с геометрией греки плодотворно разрабатывали также многие другие области математики, но в настоящее время мы всюду, несомненно и в геометрии, существенно перегнали их.

Ф. Клейн

Во все века окружность пользовалась наивысшим уважением. Ее совершенная форма одинаково волновала как философов, так и астрономов. До открытия Кеплером его законов мысль о том, что планеты могли бы двигаться иначе, чем по круговым орбитам, была невероятной. В наши дни слова «квадрат», «прямая» и им подобные иногда имеют пренебрежительный оттенок, но слово «окружность» — никогда. Очищенное от суеверного вздора и псевдонауки, это слово и сейчас достойно уважения, как и всегда.

Из-за недостатка места мы смогли изложить лишь несколько самых интересных свойств окружности, обнаруженных после Евклида, которые связывают ее с треугольником и другими многоугольниками.

§ 1. Степень точки относительно окружности

Мы начинаем наши исследования с напоминания о двух теоремах Евклида: теореме о произведении длин частей, на которые две хорды круга делят друг друга (т. е. в обозначениях рисунка 23 $|PA| \cdot |PA'| = |PB| \cdot |PB'|$), и теореме, сравнивающей секущую и касательную, проведенные из одной и той же точки P вне круга (на рисунке 24 $|PA| \cdot |PA'| = |PT|^2$). Если мы договоримся рассматривать касательную как предельное положение секущей, то сможем соединить эти результаты следующим образом:

Теорема 2.11. *Если две прямые, проходящие через точку P, пересекают окружность: одна — в точках A и A' (возможно совпадающих), а другая — в точках*

B и B′ (возможно совпадающих), то

$$|PA| \cdot |PA'| = |PB| \cdot |PB'|.$$

Для доказательства достаточно заметить, что из подобия треугольников PAB' и PBA' (с общим углом в точке P, рис. 23) следует, что

$$\frac{|PA|}{|PB'|} = \frac{|PB|}{|PA'|}.$$

В случае, изображенном на рисунке 24, мы можем с

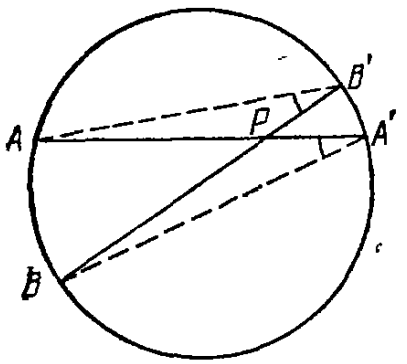


Рис. 23.

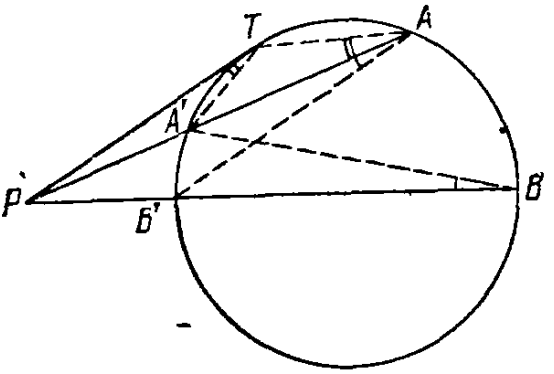


Рис. 24.

тем же успехом использовать подобные треугольники PAT и PTA', получая

$$\frac{|PA|}{|PT|} = \frac{|PT|}{|PA'|},$$

а затем записать $|PA| \cdot |PA'| = |PT|^2 = |PB| \cdot |PB'|$.

Обозначим через R радиус окружности и через d расстояние от точки P до центра окружности. Построив диаметр BB', проходящий через точку P (находящуюся дальше от точки B, чем от точки B'), мы видим, что если точка P находится внутри окружности (как на рис. 23), то

$$|AP| \cdot |PA'| = |BP| \cdot |PB'| = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2,$$

а если точка P — вне ее (как на рис. 24), то

$$|P1| \cdot |PA'| = |PB| \cdot |PB'| = (d + R)(d - R) = d^2 - R^2.$$

Равенство

$$|AP| \cdot |PA'| = R^2 - d^2$$

дает короткое доказательство формулы, принадлежащей Эйлеру:

Теорема 2.12. *Пусть точки O и I являются центрами (соответственно) описанной и вписанной окружностей треугольника, радиусы которых равны R и r; пусть d есть расстояние $|OI|$. Тогда*

$$d^2 = R^2 - 2rR. \tag{2.121}$$

На рисунке 25 изображена внутренняя биссектриса угла A, продолженная до пересечения с описанной окружностью в точке L, являющейся серединой той дуги BC, которая не содержит точку A. LM — диаметр, перпендикулярный стороне BC. Обозначая для удобства $\alpha = \frac{1}{2}\hat{A}$ и $\beta = \frac{1}{2}\hat{B}$, мы замечаем, что

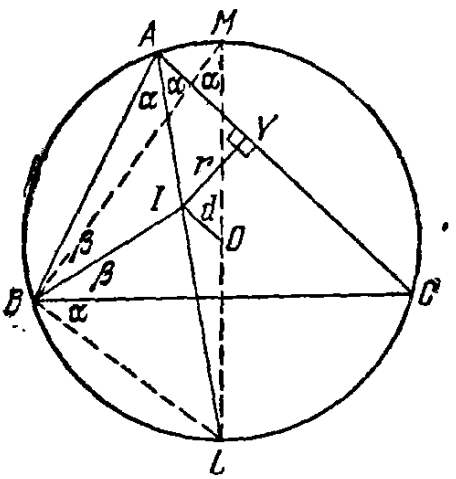


Рис. 25.

$$\widehat{BML} = \widehat{BAL} = \alpha,$$

$$\widehat{LBC} = \widehat{LAC} = \alpha.$$

Так как внешний угол треугольника ABI в вершине I удовлетворяет соотношению:

$$\widehat{BIL} = \alpha + \beta = \widehat{LBI},$$

то треугольник LBI — равнобедренный. Таким образом,

$$R^2 - d^2 = |LI| \cdot |IA| = |LB| \cdot |IA| =$$

$$= |LM| \cdot \frac{|LB|/|LM|}{|IY|/|IA|} \cdot |IY| = |LM| \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \cdot |IY| =$$

$$= |LM| \cdot |IY| = 2Rr,$$

т. е. $d^2 = R^2 - 2rR$, что мы и хотели доказать.

Для любой окружности радиуса R и любой точки P, отстоящей на расстояние d от центра, мы называем число

$$d^2 - R^2$$

степенью точки P относительно окружности. Эта степень является положительным числом, когда точка P лежит вне окружности, нулем, когда точка P лежит на окружности, и отрицательным числом, когда точка P лежит внутри нее. Для первого из этих случаев мы уже получили выражение

$$|PA| \cdot |PA'|,$$

где A и A' — любые две точки на окружности, коллинеарные с точкой P (как в теореме 2.11). Это выражение для степени точки P останется справедливым для любого положения точки P, если мы согласимся принять ньютоновскую идею о *направленных* прямолинейных отрезках, как в одномерной векторной алгебре, в которой

$$\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA}.$$

Произведение (или отношение) двух направленных отрезков на одной прямой рассматривается как положительное или отрицательное число в зависимости от того, совпадают или не совпадают их направления. При таком соглашении равенство

$$d^2 - R^2 = PA \times PA' \text{ *)}$$

выполняется во всех случаях. Если точка P — внутри окружности, то $d^2 - R^2 = -(R^2 - d^2) = -AP \times PA' = PA \times PA'$, а если точка P — на окружности, то либо точка A, либо точка A' совпадает с точкой P; поэтому один из этих отрезков имеет длину, равную нулю. С другой стороны, заметив, что произведение $PA \times PA'$ имеет одно и то же значение для любой секущей (или хорды), проходящей через точку P, мы могли бы использовать эту величину для определения степени точки P относительно окружности.

*) Следуя установившейся традиции, мы будем обозначать направленные отрезки и в тексте, и в формулах просто парой букв (без стрелок или других знаков): первой ставится буква, которой отмечена начальная точка, а затем буква, которой отмечена конечная точка (при этом $AB = -BA$). Для обозначения произведения направленных отрезков будет использован косой крест. Путаница с обычными отрезками исключается тем, что в тексте всегда будет оговорен случай использования направленных отрезков, в формулах же участвуют для обычных отрезков лишь их длины, имеющие специальное обозначение. — *Прим. перев.*

Слово *степень* было впервые использовано в этом значении Якобом Штейнером, чье имя уже упоминалось в первой главе.

Упражнения

1. Какую наименьшую (алгебраически) величину может иметь степень точки относительно окружности данного радиуса R? Какая точка имеет эту экстремальную степень?

2. Каково множество точек, имеющих постоянную степень (бóльшую, чем $-R^2$) относительно данной окружности?

3. Пусть степень точки имеет положительное значение t^2. Дайте геометрическую интерпретацию длины t.

4. Если PT и PU — касательные из точки P к двум концентрическим окружностям, причем точка T находится на меньшей из них, и если отрезок PT пересекает бóльшую окружность в точке Q, то

$$|PT|^2 - |PU|^2 = |QT|^2.$$

5. Радиус окружности, описанной вокруг треугольника, по крайней мере вдвое больше радиуса вписанной окружности.

6. Выразите (в терминах r и R) степень центра вписанной окружности относительно описанной.

7. Применение направленных отрезков дает нам возможность выразить теорему Стюарта (упражнение 4 § 2 гл. 1) в следующей симметричной форме ([22], стр. 152): *Если P, A, B, C — четыре точки, из которых последние три коллинеарны, то*

$$PA^2 \cdot BC + PB^2 \cdot CA + PC^2 \cdot AB + BC \times CA \times AB = 0.$$

8. Прямая, проходящая через центроид G треугольника ABC пересекает стороны треугольника в точках X, Y, Z. Используя понятие направленных отрезков, докажите, что

$$\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ} = 0.$$

9. Сколь далек горизонт, если смотреть с вершины горы высотой в 1 милю (1 миля = 1,609 км)? (Считайте, что Земля — сфера диаметра 7920 миль.)

§ 2. Радикальная ось двух окружностей

Е. Т. Белл рассказывает интересную историю ([4], стр. 48). Молодая принцесса Елизавета, высланная из Богемии, применяя метод координат, выполнила решение одной геометрической задачи, которая, по утверждению Белла, «являлась прекрасным образцом задач, неприспособленных для прямого применения к ним грубой силы элементарной декартовой геометрии». Ее учителем был Рене Декарт (в честь которого

декартовы*) координаты и получили свое название**)). Узнав об этом, он заметил, что «не взялся бы выполнить ее решение даже за ... месяц».

Урок ясен: если у нас имеется метод, с помощью которого можно получить решение задачи, то это решение может еще и не быть наилучшим или самым экономным. Во всяком случае, аналитическое доказательство следующей теоремы, будучи нисколько не сложнее, чем обычное синтетическое доказательство ([7], стр. 32), влечет за собой ряд интересных результатов.

Теорема 2.21. *Множество точек, для которых степени относительно двух неконцентричных окружностей равны, является прямой, перпендикулярной линии центров этих окружностей.*

В терминах декартовых координат квадрат расстояния d между любыми двумя точками (x, y) и (a, b) выражается как

$$(x-a)^2+(y-b)^2.$$

Поэтому степень точки (x, y) относительно окружности радиуса r с центром в точке (a, b) равна

$$d^2-r^2=(x-a)^2+(y-b^2)-r^2.$$

В частности, сама окружность, являясь множеством точек (x, y) степени нуль, имеет уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0. \tag{2.211}$$

То же самое уравнение в форме $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ выражает окружность как множество точек, удаленных от точки (a, b) на постоянную величину r.

Когда эта окружность выражена в форме

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \tag{2.212}$$

$(c=a^2+b^2-r^2)$, степень произвольной точки (x, y) снова выражается левой частью уравнения, а именно:

$$x^2+y^2-2ax-2by+c.$$

---

*) Их еще называют картезианскими также в честь Декарта, латинизированное имя которого — Renatus Cartesius. — *Прим. перев.*

**) Некоторые считают, что создание аналитической геометрии в действительности принадлежит Пьеру Ферма (1601—1665). Они утверждают, что ее основная идея была им изложена в одном из писем к Декарту.

Другая окружность с тем же центром (a, b), но иным радиусом, описывается уравнением такой же формы, но с другим c, а любая окружность с отличающимся центром описывается уравнением вида

$$x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0, \tag{2.213}$$

где либо $a \neq a'$, либо $b \neq b'$, либо одновременно и то, и другое. Таким образом, мы можем использовать уравнения (2.212) и (2.213) для описания двух неконцентрических окружностей, упомянутых в теореме 2.21. Множество всех точек (x, y), степени которых относительно этих двух окружностей равны, описывается уравнением

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c',$$

а так как $x^2 + y^2$ сокращается, то это множество есть прямая

$$(a' - a)x + (b' - b)y = {}^1/_2(c' - c).$$

Выбрав нашу систему отсчета так, чтобы ось x проходила через оба центра, мы сможем описать эти две окружности в более простой форме,

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c' = 0, \tag{2.214}$$

где $a' \neq a$. Тогда наше множество описывается уравнением

$$x = \frac{c' - c}{2(a' - a)}.$$

Эта прямая, параллельная оси Oy, перпендикулярна оси Ox, которая является линией центров. Так как прямая может быть определена геометрически через эти окружности (как множество, содержащее все точки с одинаковыми степенями), то мы могли бы принять ее за саму ось Oy, как изображено на рисунке 26. Таким образом, любые две неконцентрические окружности могут быть описаны в еще более простой форме

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0. \tag{2.215}$$

Теперь наше множество описывается уравнением $x=0$. И, наоборот, каждая точка $(0, y)$ прямой $x = 0$ имеет

одну и ту же степень $y^2 + c$ относительно обеих окружностей.

Это замечание заканчивает доказательство. Конечно, мы могли бы сократить доказательство, записав уравнение этих двух окружностей сразу же в форме

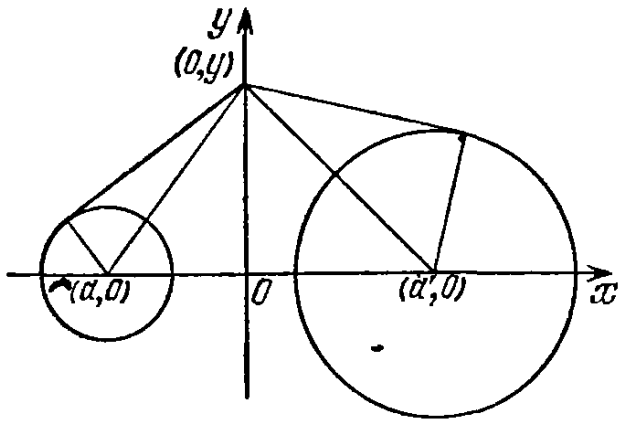


Рис. 26.

(2.214). Однако тогда мы бы пропустили прекрасную лемму о том, что для любой окружности, выраженной в стандартной форме (2.212), *степень произвольной точки* (x, y) *равна выражению в левой части уравнения.*

Множество точек, имеющих одинаковую степень относительно двух неконцентрических окружностей,

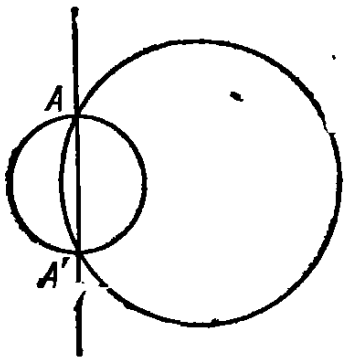


Рис. 27.

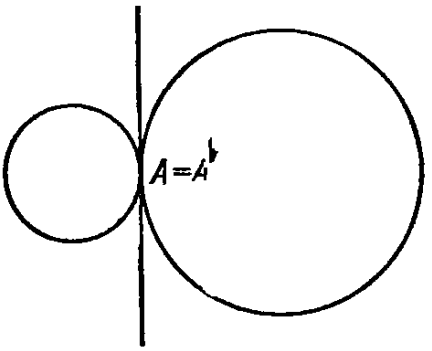


Рис. 28.

называется их *радикальной осью.* В частном случае, когда эти две окружности пересекаются в точках A и A' (рис. 27), каждая из этих точек имеет степень нуль относительно обеих окружностей, и поэтому ради-

кальная ось — просто прямая AA'. Аналогично, когда две окружности касаются друг друга (рис. 28), их радикальная ось является их общей касательной в точке их касания.

Упражнения

1. Каково множество точек, для которых касательные к двум данным окружностям имеют равные длины?

2. Если расстояние между центрами двух окружностей больше, чем сумма их радиусов, то окружности имеют четыре общие касательные. Середины этих четырех отрезков коллинеарны.

3. Пусть PAB, AQB, ABR, $P'BA$, $BQ'A$, BAR' — шесть подобных треугольников, лежащих по одну сторону от их общей стороны AB (три из них показаны на рисунке 29, а остальные могут быть получены симметрией *) относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB). Те вершины этих треугольников, которые не лежат на отрезке AB (а именно, P, Q, R, P', Q', R') все лежат на одной окружности.

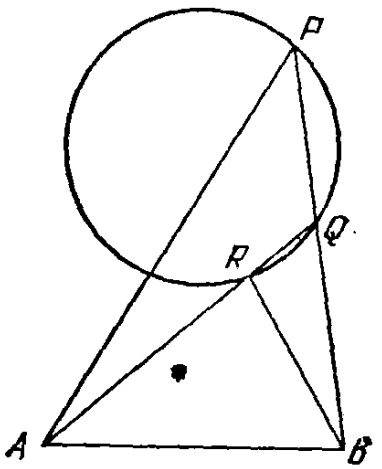


Рис. 29.

Указание. Сравните степени точек A и B относительно окружности PQR.

4. Пусть даны числа a и b. Для каких значений c уравнение (2.212) описывает окружность?

5. Опишите построение радикальной оси двух данных неконцентрических окружностей: построение должно быть применимо и в том случае, когда одна окружность содержит другую.

§ 3. Соосные окружности

Как мы видели, любые две неконцентрические окружности могут быть описаны уравнениями (2.215) и, следовательно, являются элементами бесконечного семейства, описываемого уравнением

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

где c — фиксировано, в то время как a меняется во всем интервале действительных значений (за

*) Операция симметрии бывает полезна при решении многих геометрических задач. Смотри, например, Яглом [43], т. 1. — *Прим. ред.*

исключением интервала от $-\sqrt{c}$ до $+\sqrt{c}$ в случае положительного c). Это семейство называется *пучком соосных окружностей*, так как каждые две окружности из этого семейства имеют одну и ту же линию центров и одну и ту же радикальную ось. Если c отрицательно, то каждый элемент семейства пересекает ось y в одних и тех же двух точках $(0, \pm\sqrt{-c})$, и пучок состоит просто из *всех окружностей, проходящих через эти две точки.* Аналогично, если $c=0$, то пучок состоит из всех окружностей, которые касаются оси Oy в начале координат. Случай, когда c положительно, проиллюстрирован на рисунке 30.

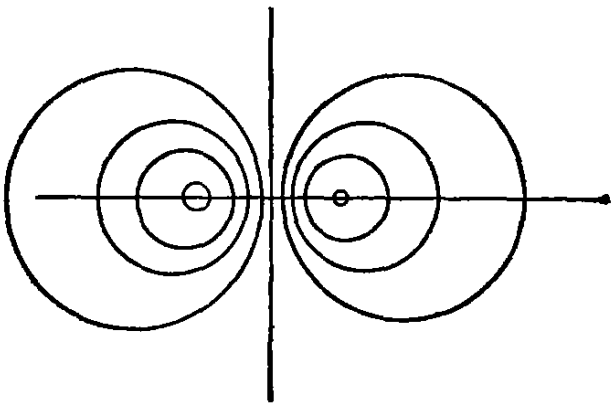


Рис. 30.

Пусть три окружности не являются соосными, и кроме того, никакие две не концентричны, тогда, рассмотрев их попарно, мы сможем найти три радикальные оси. Любая точка, которая имеет одну и ту же степень относительно всех трех окружностей, должна лежать на всех этих трех прямых. Наоборот, любая точка пересечения двух из трех радикальных осей, имеющая одну и ту же степень относительно всех трех окружностей, должна также лежать и на третьей прямой. Если две из этих осей параллельны, то и все три должны быть параллельны. В частности,

Теорема 2.31. *Если центры трех окружностей образуют треугольник, то существует только одна точка, степени которой относительно этих трех окружностей равны.*

Эта общая точка трех радикальных осей называется *радикальным центром* трех окружностей.

Упражнения

1. Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Пусть хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Тогда прямая TP делит угол ATB пополам.

2. Если O — радикальный центр трех окружностей, каждая из которых лежит вне других, то точки касания шести касательных, проведенных из точки O, лежат все на одной окружности.

§ 4. Еще раз о высотах и ортоцентре треугольника

Окружность, описанная вокруг треугольника, которая уже встречалась нам в предыдущей главе, заслуживает дальнейшего изучения. На рисунке 31 показана окружность, описанная вокруг треугольника ABC с центром в точке O, диаметром AA_0, проходящим через точку A, и радиусом OL ($|OL| = R$), перпендикулярным стороне BC. Мы также видим высоту $|AD| = h_a$. Равенство углов в точках B и A_0 указывает нам на подобие треугольников ABD и AA_0C, откуда

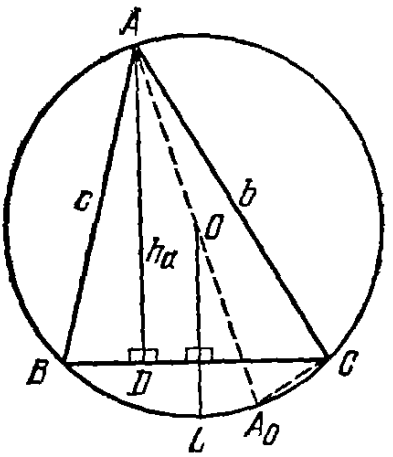


Рис. 31.

$$\frac{h_a}{c} = \frac{b}{|AA_0|}$$

и

$$h_a = \frac{bc}{2R}. \tag{2.401}$$

Вычитая из величины угла BAC величины двух равных углов:

$$\widehat{A_0AC} = \widehat{BAD} = 90^\circ - \hat{B},$$

мы получаем:

$$\widehat{DAA_0} = \hat{A} - 2(90^\circ - \hat{B}) =$$

$$= \hat{A} + 2\hat{B} - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = \hat{B} - \hat{C}.$$

Это выражение для угла $\widehat{DAA_0}$, равного углу $\widehat{DAO}$, было получено нами для того случая (изображенного на рисунке), когда $\hat{B} > \hat{C}$. Если бы мы взяли $\hat{B} < \hat{C}$, то угол DAO стал бы пересечением двух равных углов A_0AC и BAD, а, следовательно, его величина стала бы

равной $C - B$. Теперь мы можем объединить оба случая, записав

(2.402) $$\widehat{DAO} = |B - \hat{C}|.$$

На рисунке 32 показаны три высоты AD, BE, CF, продолженные до пересечения с описанной окружностью в точках D', E', F'. Точка H, как всегда, — ортоцентр. Теперь $\widehat{DAB} = \widehat{FCB}$, причем оба угла являются дополнительными углами к углу B до прямого угла. Это объясняет использование нами одного и того же символа θ для обозначения обоих углов. Также $\widehat{BCD'} = \widehat{BAD'}$, поэтому мы обозначили угол BCD' тем же символом. Из конгруэнтности прямоугольных треугольников CDH и CDD' следует, что

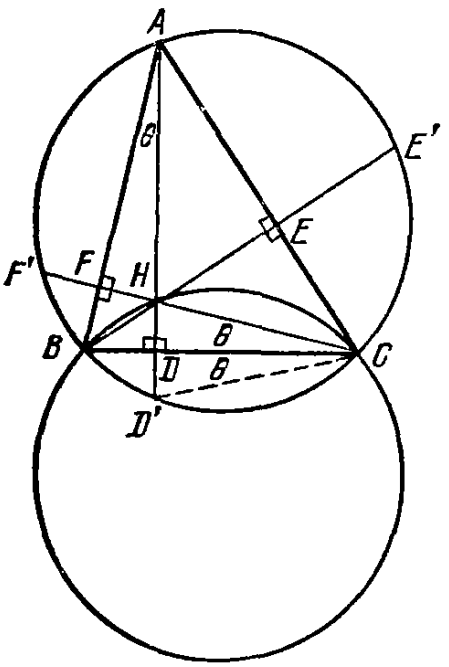


Рис. 32.

(2.403) $$|HD| = |DD'|.$$

Аналогично, $|HE| = |EE'|$ и $|HF| = |FF'|$.

Так как окружность с диаметром AB проходит через точки D и E, то из теоремы 2.11 мы получаем, что $|HA| \cdot |HD| = |HB| \cdot |HE|$. Подобным же образом, $|HB| \cdot |HE| = |HC| \cdot |HF|$. Следовательно,

(2.404) $$|HA| \cdot |HD| = |HB| \cdot |HE| = |HC| \cdot |HF|.$$

Если X, Y, Z — любые точки, взятые на сторонах BC, CA, AB соответственно, то окружности, построенные на чевианах AX, BY и CZ как на диаметрах, будут проходить через основания высот: точки D, E, F соответственно. (Вторая и третья окружности изображены на рисунке 33.) Три равных выражения в соотношении (2.404) являются степенями точки H относительно этих трех окружностей. Следовательно, H есть радикальный центр этих окружностей. Таким образом, мы доказали две интересные теоремы, которые появились в разное время, как трудные задачи.

Теорема 2.41. *Если окружности построены на двух чевианах как на диаметрах, то их радикальная ось проходит через ортоцентр этого треугольника.*

Теорема 2.42. *Для любых трех несоосных окружностей, имеющих чевианы в качестве диаметров, точка H — их радикальный центр.*

С другой стороны, те же результаты могут быть получены с помощью следующих простых соображений. Если AD — высота, опущенная из точки A, то пучок соосных окружностей, проходящих через точки A и D, может быть описан как совокупность окружностей, имеющих чевианы, проходящие через точку A, в качестве диаметров. Две из этих чевиан есть стороны AB и AC. Таким образом, окружности, построенные на сторонах BC, CA, AB как на диаметрах и взятые попарно, имеют высоты в качестве своих радикальных осей и точку A в качестве своего радикального центра. (Таким образом, видно, что конкурентность высот является частным случаем теоремы 2.31.) Из этого следует, что точка H имеет одну и ту же степень относительно всех окружностей, имеющих чевианы в качестве диаметров.

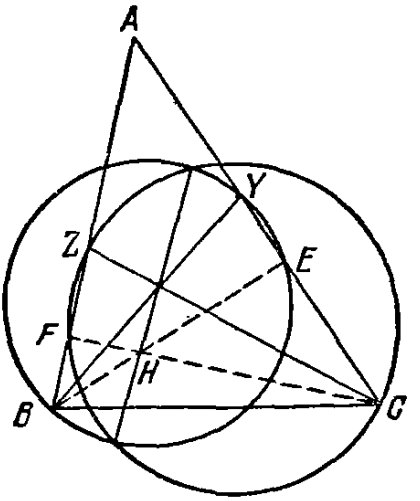


Рис. 33.

Обратите внимание на слово «несоосный» в формулировке теоремы 2.42. Оно означает, что три рассматриваемые чевианы не все исходят из одной вершины треугольника ABC. В следующей теореме мы увидим, что это понятие означает даже немного больше!

Из теоремы 2.42 можно вывести ряд любопытных задач (применив ее к чевианам AX, BY, CZ), если дополнительно ввести некоторые несущественные детали. Пусть вас не смущает тот факт, что хотя три чевианы треугольника, как правило, не имеют общей точки, мы будем рассматривать и случаи их конкурентности. Например, докажите, что для окружностей, построенных на медианах (или высотах, или биссек-

трисах) как на диаметрах, их радикальный центр является ортоцентром этого треугольника.

Самый интересный случай для неконкурентных чевиан возникает тогда, когда точки X, Y, Z, лежащие на отрезках BC, CA, AB (или их продолжениях), оказываются коллинеарными, как на рисунке 34. Тогда мы можем с равным успехом утверждать, что точки X, B, C — коллинеарные точки на сторонах треугольника AYZ и что точки Y, C, A — коллинеарные точки на сторонах треугольника BZX, и что точки Z,

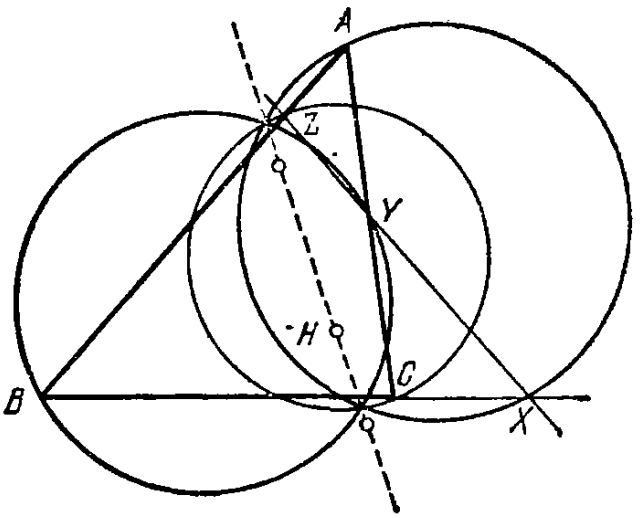


Рис. 34.

A, B — коллинеарные точки на сторонах треугольника CXY.

Следовательно, окружности, построенные на отрезках AX, BY и CZ как на диаметрах, расположены так, что их радикальные оси проходят через точку H, а также, по тем же соображениям, и через ортоцентры других трех треугольников. Так как эти четыре ортоцентра очевидно различны, то эти радикальные оси должны совпасть. Таким образом, нами доказана

Теорема 2.43. *Если четыре прямые пересекаются в шести точках A, B, C, X, Y, Z так, что образуются множества коллинеарных точек: $\{X, B, C\}$, $\{Y, C, A\}$, $\{Z, A, B\}$, $\{X, Y, Z\}$, то окружности, построенные на отрезках AX, BY, CZ как на диаметрах, соосны, а ортоцентры четырех треугольников AYZ, BZX, CXY и ABC коллинеарны.*

Другое свойство треугольника и его высот проиллюстрировано на рисунке 8. Если мы внимательно рассмотрим этот рисунок, то мы придем к выводу, что по тем же причинам, по которым точка H является ортоцентром треугольника ABC, точка A является ортоцентром треугольника HBC, точка B — ортоцентром треугольника HAC, а точка C — ортоцентром треугольника HAB. Рассмотренная здесь конфигурация $ABCH$ называется *ортоцентрическим четырехугольником* и обладает рядом интересных свойств. Здесь мы рассмотрим только одно из них, а именно: *если $ABCH$ — ортоцентрический четырехугольник, то для четырех треугольников, вершины которых являются вершинами этого четырехугольника, описанные вокруг них окружности имеют равные радиусы.*

Простейшее доказательство этого свойства основано на уравнении (2.403) и рисунке 32. На этом рисунке треугольники HBC и $D'BC$ конгруэнтны, а потому окружности, описанные вокруг них, конгруэнтны. Следовательно, окружность, описанная вокруг треугольника $D'BC$ (или ABC), конгруэнтна окружности, описанной вокруг треугольника HBC. Аналогично проводятся рассуждения и для остальных треугольников.

Упражнения

1. Точки, в которых высоты или их продолжения пересекают описанную окружность, образуют треугольник, подобный ортоцентрическому.

2. Биссектрисы внутренних углов треугольника ABC продолжаются до пересечения с описанной окружностью в точках L, M, N соответственно. Выразите углы треугольника LMN через углы треугольника ABC.

§ 5. Прямые Симсона

Если из точки P опущены перпендикуляры на стороны треугольника ABC, то основания этих перпендикуляров, как правило, образуют вершины треугольника $A_1B_1C_1$ (это *педальный треугольник*, рассмотренный в § 9 гл. 1).

Теперь давайте рассмотрим тот особый случай, когда точка P лежит на описанной окружности, как на рисунке 35. Для определенности будем считать, что

точка P находится на дуге CA, не содержащей точку B.

Все остальные случаи могут быть получены переобозначением вершин буквами A, B, C. Так как углы A_1, B_1 и C_1 — прямые, то точка P также лежит на окружностях, описанных вокруг треугольников A_1BC_1, A_1B_1C и AB_1C_1. Поэтому

$$\widehat{APC} = 180° - B = \widehat{C_1PA_1}$$

и, вычитая $\widehat{APA_1}$, мы выводим, что

$$\widehat{A_1PC} = \widehat{C_1PA}.$$

Но так как точки A_1, C, P, B_1 лежат на окружности, то

$$\widehat{A_1PC} = \widehat{A_1B_1C}$$

и, так как точки A, B_1, P, C_1 лежат на окружности, то

$$\widehat{C_1PA} = \widehat{C_1B_1A}.$$

Таким образом,

$$\widehat{A_1B_1C} = \widehat{C_1B_1A};$$

отсюда следует, что точки A_1, B_1, C_1 — коллинеарны, т. е. педальный треугольник «вырождается».

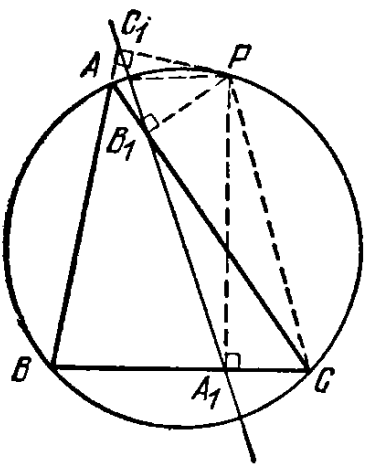


Рис. 35.

Наоборот, если точка P расположена так, что педальный треугольник треугольника ABC вырождается, то, очевидно, что точка P должна лежать внутри одного из углов треугольника ABC и вне противолежащей ему стороны. Переобозначая вершины, если это необходимо, мы можем предположить, что этот «один угол» является углом B и что точка C_1 лежит на продолжении стороны BA за точку A, как на рисунке 35. Повторяя приведенные выше рассуждения об углах в обратном порядке, мы сможем получить, что точка P лежит на описанной окружности. Следовательно, справедлива

Теорема 2.51. *Основания перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника, коллине-*

арны тогда и только тогда, когда эта точка лежит на описанной окружности.

Прямая, содержащая эти основания, известна как *прямая Симсона* данной точки относительно данного треугольника. Роберт Симсон (1687—1768) внес значительный вклад как в геометрию, так и в арифметику. Например, именно он открыл, что если f_n есть n-й член ряда Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., то $f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ ([17], стр. 243—247). Прямая Симсона приписывалась ему, поскольку она казалась типичной для его геометрических идей. Однако историки тщетно пытались найти ее в его работах. В действительности, она была открыта в 1797 году Вильямом Уоллесом.

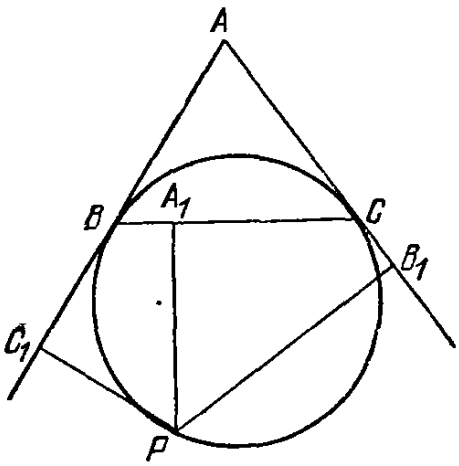


Рис. 36.

Упражнения

1. Нуждается ли наше доказательство теоремы 2.51 в каких-либо изменениях для того случая, когда треугольник ABC — тупоугольный?

2. Какая точка окружности имеет прямую CA своей прямой Симсона?

3. Существуют ли какие-либо точки, лежащие на своей прямой Симсона? Какими прямыми они могут быть в этом случае?

4. Две касательные к окружности, касающиеся ее в точках B и C, пересекаются в точке A. Пусть A_1, B_1, C_1 — педальный треугольник равнобедренного треугольника ABC для произвольной точки P на этой окружности, как на рисунке 36. Тогда

$$|PA_1|^2 = |PB_1| \cdot |PC_1|.$$

§ 6. Теорема Птолемея

Понятие прямой Симсона может быть использовано для вывода очень полезной теоремы. Рассмотрим вновь рисунок 35. Хотя «педальный треугольник» $A_1B_1C_1$ вырожден, длины его «сторон» все еще могут быть вычислены с помощью теоремы 1.91:

$$|B_1C_1| = \frac{a|AP|}{2R}, \quad |A_1C_1| = \frac{b|BP|}{2R}, \quad |A_1B_1| = \frac{c|CP|}{2R}.$$

Так как $|A_1B_1|+|B_1C_1|=|A_1C_1|$, мы выводим, что

$$c|CP|+a|AP|=b|BP|,$$

т. е.

$$|AB|\cdot|CP|+|BC|\cdot|AP|=|AC|\cdot|BP|.$$

Так как $ABCP$ — вписанный четырехугольник, то таким образом мы доказали теорему Птолемея:

Теорема 2.61. *Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.*

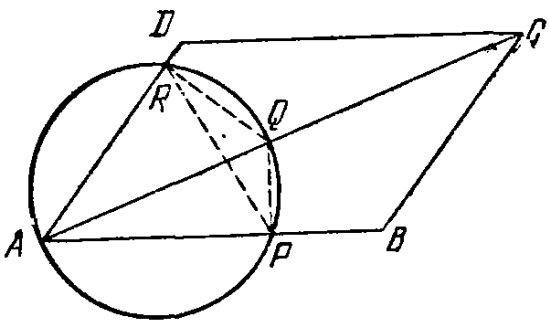


Рис. 37.

Теорема Птолемея имеет обратную, которая может быть усилена, если принять во внимание, что в случае, когда точка B_1 не лежит на отрезке A_1C_1, равенство $|A_1B_1|+|B_1C_1|=|A_1C_1|$ должно быть заменено «неравенством треугольника»

$$|A_1B_1|+|B_1C_1|>|A_1C_1|,$$

что дает

$$|AB|\cdot|CP|+|BC|\cdot|AP|>|AC|\cdot|BP|.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2.62. *Если точка P не лежит на дуге CA окружности, описанной вокруг треугольника ABC, то*

$$|AB|\cdot|CP|+|BC|\cdot|AP|>|AC|\cdot|BP|.$$

Упражнения

1. Пусть P — любая точка в плоскости равностороннего треугольника ABC. Тогда $|PC|+|PA|=|PB|$ или $|PC|+|PA|>|PB|$ в зависимости от того, лежит или иет точка P на дуге CA описанной окружности. (Интересные применения этого результата см. [31], стр. 11—12.)

2. Если точка P лежит на дуге CD окружности, описанной вокруг квадрата $ABCD$, то

$$|PA|\cdot(|PA|+|PC|)=|PB|(|PB|+|PD|).$$

3. Если окружность пересекает две стороны и диагональ параллелограмма $ABCD$ в точках P, R, Q, как показано на рисунке 37, то

$$|AP| \cdot |AB| + |AR| \cdot |AD| = |AQ| \cdot |AC|.$$

Указание. Примените теорему 2.61 к четырехугольнику $PQRA$, а потом замените стороны треугольника PQR соответствующими сторонами подобного ему треугольника CBA.

§ 7. Еще раз о прямых Симсона

Прямая Симсона обладает многими интересными свойствами и стоит рассмотреть некоторые из них. Начнем с рассмотрения рисунка 38, который повторяет рисунок 35, за исключением перпендикуляра PA_1,

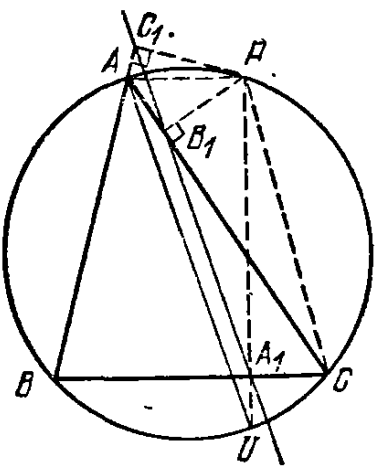


Рис. 38.

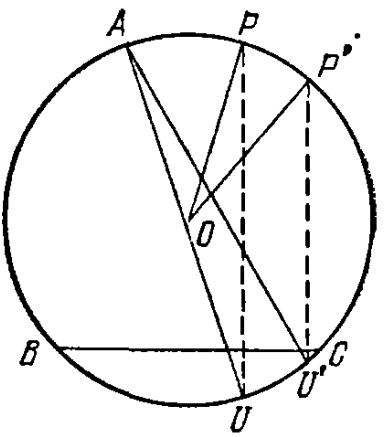


Рис. 39.

продолженного до пересечения с описанной окружностью в точке U, и добавленной прямой AU.

Поскольку четырехугольники $PAUC$ и PB_1A_1C вписанные, то

$$\overset{\frown}{PUA} = \overset{\frown}{PCA} = \overset{\frown}{PCB_1} = \overset{\frown}{PA_1B_1}.$$

Поэтому *прямая AU параллельна прямой Симсона A_1B_1*.

Сравним теперь прямую Симсона точки P с прямой Симсона другой точки P' (лежащей, конечно, на той же описанной окружности). Угол между этими двумя прямыми Симсона, очевидно, равен углу UAU' между параллельными им прямыми AU и AU' (рис. 39). Две хорды PU и $P'U'$, перпендикулярные

отрезку BC, параллельны друг другу и отсекают равные дуги PP' и UU'. Таким образом,

$$\widehat{UAU'} = \frac{1}{2}\widehat{UOU'} = \frac{1}{2}\widehat{POP'}$$

или, если мы различаем положительные и отрицательные углы, то

$$\widehat{UAU'} = \frac{1}{2}\widehat{UOU'} = -\frac{1}{2}\widehat{POP'}.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2.71. *Величина угла между прямыми Симсона двух точек P и P', лежащих на описанной окружности, равна угловой мере величины дуги PP'.*

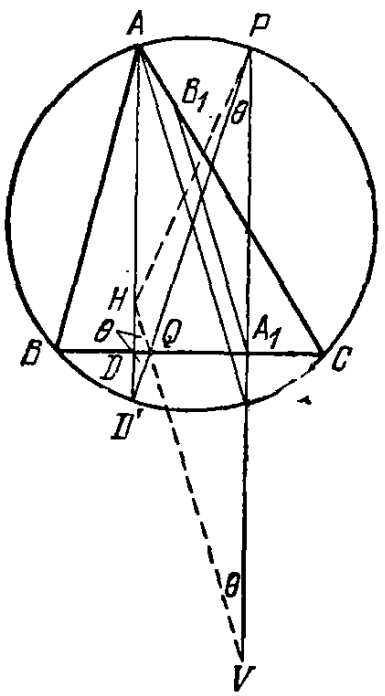


Рис. 40.

Если мы вообразим точку P равномерно двигающейся по описанной окружности, то прямая AU будет равномерно вращаться вокруг точки A со вдвое меньшей угловой скоростью и направленной в обратную сторону; при этом она переменит первоначальное направление на противоположное к тому моменту, когда точка опишет полную окружность. Тем временем, прямая Симсона будет поворачиваться соответствующим образом вокруг непрерывно меняющегося центра вращения. На самом деле, прямая Симсона при движении постоянно касается красивой симметричной кривой, которая называется дельтоидой или «гипоциклоидой Штейнера» [24]. Это движение можно было бы легко проследить, если нарисовать последовательные положения прямой и составить из них мультфильм.

Для продолжения наших исследований давайте рассмотрим сейчас рисунок 40, который является комбинацией рисунков 34 и 38 с добавлением прямой HP, прямой $D'P$ (пересекающей отрезок BC в точке Q) и прямой HQ (продолженной до пересечения с прямой

PU в точке V). Так как и отрезок HD', и отрезок PV перпендикулярны стороне BC, то из уравнения (2.403) следует, что треугольники QHD' и QPV являются равнобедренными. Другими словами, отрезок HV является образом отрезка $D'P$ при симметрии относительно прямой BC. Так как

$$\widehat{D'HV} = \widehat{PVH} = \widehat{D'PU} = \widehat{D'AU},$$

то прямая HV параллельна прямой AU, которая, как мы уже показали, параллельна прямой Симсона точки P.

И, наконец, отметим, что в треугольнике PHV прямая Симсона A_1B_1 параллельна стороне HV и делит пополам отрезок PV (в точке A_1). Следовательно, она также обязана делить пополам оставшуюся сторону PH:

Теорема 2.72. *Прямая Симсона точки (лежащей на описанной окружности) делит пополам отрезок, соединяющий эту точку с ортоцентром.*

Все это было только введением в круг идей, связанных с прямои Симсона. Существует много других свойств, рассмотрение которых мы, к сожалению, вынуждены предоставить другим авторам.

Упражнения

1. Прямые Симсона диаметрально противоположных точек описанной окружности перпендикулярны между собой и пересекаются на окружности девяти точек.

2. Пусть ABC — равносторонний треугольник, вписанный в окружность с центром O, и пусть P — произвольная точка на этой окружности. Тогда прямая Симсона точки P делит пополам радиус OP.

§ 8. Теорема о бабочке

Теорема о бабочке была популярна довольно долго. Мы ее формулируем следующим образом (рис. 41):

Теорема 2.81. *Пусть через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены две произвольные хорды AB и CD. Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y. Тогда точка M является серединой отрезка XY.*

Было найдено много доказательств этой теоремы различной длины и трудности. Три доказательства

были получены от доктора Золля из Ньюаркского колледжа. Он сообщил при этом, что одно из них было предложено в 1815 году В. Г. Горнером, открывшим метод приближенного вычисления корней многочленов. (Согласно Е. Т. Беллу, метод Горнера был предвосхищен китайскими математиками.) Другое доказательство см. Р. Джонсон [11], стр. 78 и [42], стр. 33, 259. Самое короткое доказательство использует проективную геометрию ([19], стр. 78, 144). Доказательство, представленное здесь, хотя и не очень коротко, но довольно простое и легкое для запоминания.

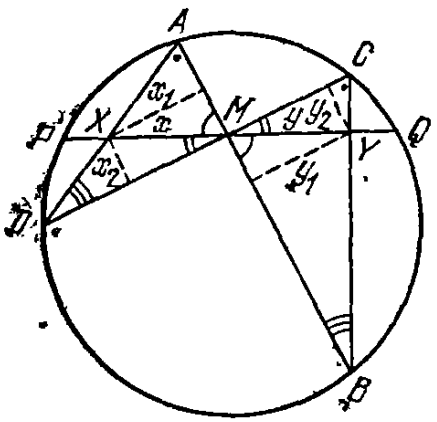


Рис. 41.

Сначала опустим перпендикуляры x_1 и y_1 из точек X и Y на прямую AB, затем перпендикуляры x_2 и y_2 из точек X и Y на прямую CD. Обозначая для удобства $a = |PM| = |MQ|$, $x = |XM|$, $y = |MY|$, мы замечаем, что из рассмотрения пар подобных треугольников Mx_1 *) и My_1, Mx_2 и My_2, Ax_1 и Cy_2, Dx_2 и By_1 вытекает, что

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}, \quad \frac{x_1}{y_2} = \frac{|AX|}{|CY|}, \quad \frac{x_2}{y_1} = \frac{|XD|}{|YB|},$$

откуда

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1 \cdot x_2}{y_1 \cdot y_2} = \frac{x_1 \cdot x_2}{y_2 \cdot y_1} = \frac{|AX| \cdot |XD|}{|CY| \cdot |YB|} = \frac{|PX| \cdot |XQ|}{|PY| \cdot |YQ|} =$$

$$= \frac{(a-x) \cdot (a+x)}{(a+y) \cdot (a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

и $x = y$, что мы и хотели доказать.

Упражнения

1. На рисунке 41 прямые AC и BD пересекают прямую PQ в двух точках, которые, как и точки X и Y, равноудалены от точки M.

---

*) Обозначение Mx_1 означает треугольник с вершиной M и противолежащей ей стороной x_1; аналогично и дальше. — *Прим. перев.*

2. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — диаметр, проходящий через точку B, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Тогда прямая AP делит пополам отрезок TH.

3. Пусть окружность (с центром в точке I), вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке X и пусть A' — середина этой стороны. Тогда прямая $A'I$ делит пополам отрезок AX.

§ 9. Теорема Морлея

Одна из самых удивительных теорем элементарной геометрии была открыта в 1904 году Франком Морлеем (отцом Кристофора Морлея, в романе которого «Гроза слева» было применено «закручивание» течения времени, особенно понравившееся геометрам). Он упоминал об этой теореме своим друзьям в Кембридже (Англия) и опубликовал ее двадцать лет спустя в Японии. Тем временем она была переоткрыта и представлена, как задача в журнале «Educational Times». Было прислано два решения, одно из которых, принадлежащее М. Т. Нараньенгару*), столь же лаконично, как и масса других, найденных с тех пор. Теорема утверждает:

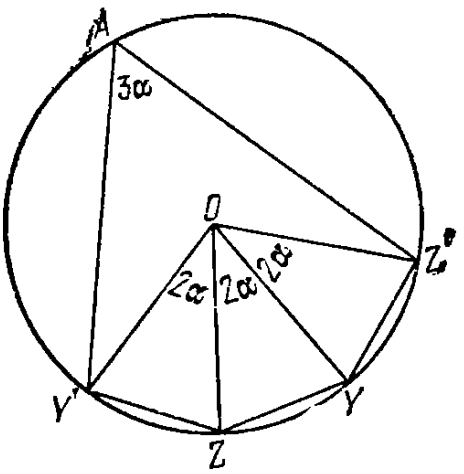


Рис. 42.

Теорема 2.91. *Точки пересечения смежных трисектрис углов произвольного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника.*

Доказательство Нараньенгара нуждается в следующей лемме (проиллюстрированной на рисунке 42):

Лемма. *Если четыре точки Y', Z, Y, Z' удовлетворяют условиям*

$$|Y'Z| = |ZY| = |YZ'|$$

и

$$\widehat{YZY'} = \widehat{Z'YZ} = 180° - 2\alpha > 60°,$$

*) Mathematical Questions and Their Solutions from Educational Times (New Series) 15 (1909), стр. 47.

то они лежат на одной окружности. Кроме того, если точка A, расположенная по другую сторону от прямой Y'Z', нежели точка Y, образует угол $\widehat{Y'AY} = 3\alpha$, *то эта пятая точка A также лежит на той же окружности.*

Докажем эту лемму. Пусть биссектрисы равных углов YZY' и $Z'YZ$ пересекаются в точке O. Тогда $OY'Z$, OZY и OYZ' — три конгруэнтных равнобедренных треугольника с углами при основании, равными $90° - \alpha$. Их равные стороны OY', OZ, OY и OZ' являются радиусами окружности с центром в точке O, а углы при их общей вершине равны по 2α. Другими

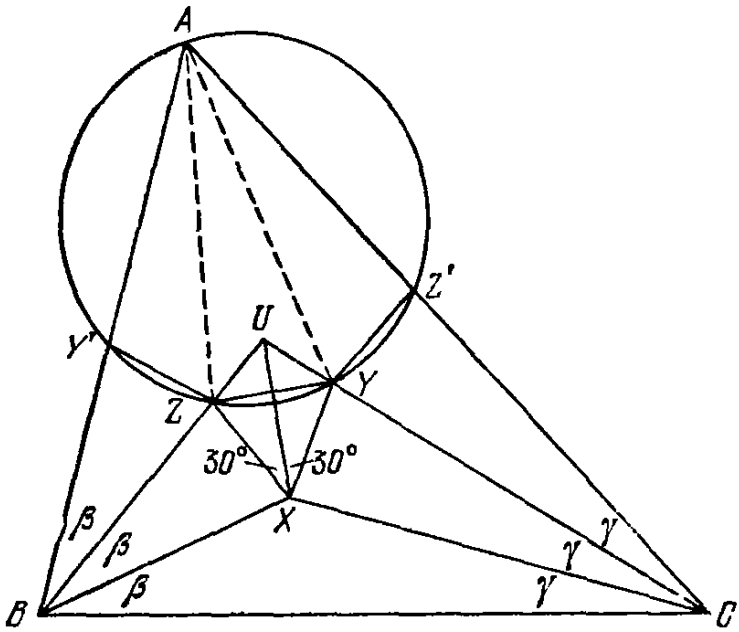


Рис. 43.

словами, каждая из равных хорд $Y'Z$, ZY и YZ' противолежит углу 2α с центром в точке O и, следовательно, противолежит углу α с вершиной на дуге $Y'Z'$, не содержащей точку Y. Эта дуга может быть описана как множество точек (по ту сторону от прямой $Y'Z'$, на которой не лежит точка Y), из которых отрезок $Y'Z'$ виден под углом 3α. Одной из таких точек является точка A, поэтому она лежит на этой окружности.

Теперь мы готовы приступить к доказательству самой теоремы 2.91. Как показано на рисунке 43, трисектрисы углов $\hat{B} = 3\beta$ и $\hat{C} = 3\gamma$ пересекаются в точ-

ках U и X. В треугольнике BCU углы B и C делятся пополам прямыми BX и CX, следовательно, X — центр окружности, вписанной в треугольник BCU, и прямая UX является биссектрисой угла U. Если мы построим точки Y и Z на прямых CU и BU так, чтобы прямые XY и XZ образовали равные углы, по 30° каждый, с прямой XU по разные стороны от нее, то $\triangle UXY \cong \triangle UXZ$, $|XY| = |XZ|$. Так как угол при вершине равен 60°, то отсюда следует, что треугольник XYZ — равносторонний.

Кроме того, треугольник UZY — равнобедренный. Его угол при вершине U тот же, что и в треугольнике UBC, у которого остальные углы равны 2β и 2γ; поэтому равные углы треугольника UYZ при вершинах Y и Z равны по $\beta + \gamma$ каждый.

Обозначая $\alpha = \hat{A}/3$, мы выводим из равенства $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, что $\alpha + \beta + \gamma = 60°$, откуда $\beta + \gamma = 60° - \alpha$. Таким образом,

$$\widehat{YZU} = 60° - \alpha \quad \text{и} \quad \widehat{XZU} = 120° - \alpha.$$

Следующий наш шаг состоит в том, что мы нанесем на рисунок отрезки $BY' \cong BX$ на прямой BA и $CZ' \cong CX$ на прямой CA. Теперь мы имеем

$$\triangle BZX \cong \triangle BZY' \quad \text{и} \quad \triangle CYX \cong \triangle CYZ',$$

так что

$$|Y'Z| = |ZX| = |ZY| = |YX| = |YZ'|.$$

Прежде чем мы сможем применить лемму, мы еще должны оценить величины углов YZY' и $Z'YZ$. Однако это довольно просто.

Так как конгруэнтные углы BZY' и BZX имеют и конгруэнтные дополнения, то

$$\widehat{UZY'} = \widehat{XZU} = 120° - \alpha$$

и

$$\widehat{YZY'} = \widehat{YZU} + \widehat{UZY} = (60° - \alpha) + (120° - \alpha) = 180° - 2\alpha.$$

Аналогично, $\widehat{Z'YZ} = 180° - 2\alpha$, и конечно, $\alpha = \frac{1}{3}\hat{A} < 60°$.

Применяя лемму, мы получаем, что пять точек Y', Z, Y, Z', A все лежат на одной окружности. Так как равные хорды $Y'Z$, ZY, YZ' стягивают равные углы α в точке A, то прямые AZ и AY делят угол A в треугольнике ABC на три равные части. Другими словами, точки X, Y, Z, которые были искусственно построены так, чтобы образовался равносторонний треугольник, на самом деле оказались точками, описанными в теореме Морлея. Доказательство теперь закончено.

Упражнения

1. Пусть трисектрисы AZ и CX при продолжении пересекаются в точке V, а BX и AY — в точке W. Тогда три прямые UX, VY и WZ конкурентны. (На языке проективной геометрии это означает, что UVW и XYZ — *перспективные* треугольники, при этом треугольник UVW *не* обязан быть равносторонним.)

2. Для каких треугольников ABC пятиугольник $AY'ZYZ'$ будет правильным?

3. Если треугольник ABC — равносторонний, то четыре точки Y', Z, Y, Z' находятся среди вершин правильного девятиугольника, у которого вершина A противоположна стороне ZY.

4. Для треугольника с углами 3α, 3β, 3γ и радиусом описанной окружности R треугольник Морлея имеет стороны, длины которых равны $8R \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.

5. Если точки Y и Z, лежащие на стороне $Z'Y'$ прямоугольника $BCZ'Y'$, обладают тем свойством, что $|Z'Y| = |YZ| = |ZY'|$, и центр этого прямоугольника — точка X — вместе с точками Y и Z образует равносторонний треугольник, то прямые BX и BZ делят прямой угол B на три равные части.

Глава 3

КОЛЛИНЕАРНОСТЬ И КОНКУРЕНТНОСТЬ

Он же, не смутясь нимало,
Развернул пазы и петли,
Стал вертеть их так и эдак,
Пока все вдруг не предстало
В виде плоскостей, квадратов,
Точно сложная фигура
Из Эвклидова трактата.

Ч. Л. Доджсон
(перевод *В. Г. Шнитке*)

В этой главе мы рассмотрим ряд новых свойств треугольников и четырехугольников. Обсуждение этих свойств подведет нас вплотную к владениям проективной геометрии, и мы даже частично нарушим ее границы. К сожалению, систематическое изложение этой очаровательной теории мы вынуждены перепоручить другим книгам, но четыре из ее самых основных теорем мы сочли возможным поместить здесь, так как они могут быть доказаны методами, изложенными еще у Евклида. На самом деле три из них являются столь давними, что в ту пору еще не было других методов, пригодных для их доказательства. Все эти теоремы касаются либо *коллинеарности* (принадлежности некоторого множества точек одной прямой), либо *конкурентности* (наличия у некоторого множества прямых общей точки). И вот тогда, когда мы обнаружим, что многие свойства параллельных прямых оказываются подобными свойствам конкурентных прямых, в наших рассуждениях начнет проявляться дух проективной геометрии.

§ 1. Четырехугольники; теорема Вариньона

Многоугольник может быть определен заданием некоторого числа точек (называемых *вершинами*) и равного ему количества отрезков (называемых *сторонами*), а именно, циклически упорядоченного множества точек на плоскости, причем такого, что никакие три последовательные точки не должны быть коллинеарными, и отрезков, соединяющих последовательные точки. Другими словами, многоугольник — это

замкнутая ломаная, лежащая на плоскости. Многоугольник, имеющий n вершин и n сторон, называется n-угольником. Иногда употребляются греческие названия n-угольников: *пентагон* ($n=5$), *гексагон* ($n=6$) и т. д. (а от греческого названия треугольника — «тригон» произошло название «тригонометрия»). Очевидно, что мы должны воздержаться от тенденции называть четырехугольник «четырехсторонником», поскольку в проективной геометрии под стороной понимают всю прямую, а не отрезок, и мы будем нуждаться в обоих терминах с различным значением.

Две стороны четырехугольника называются *смежными*, если они имеют общую вершину, в противном

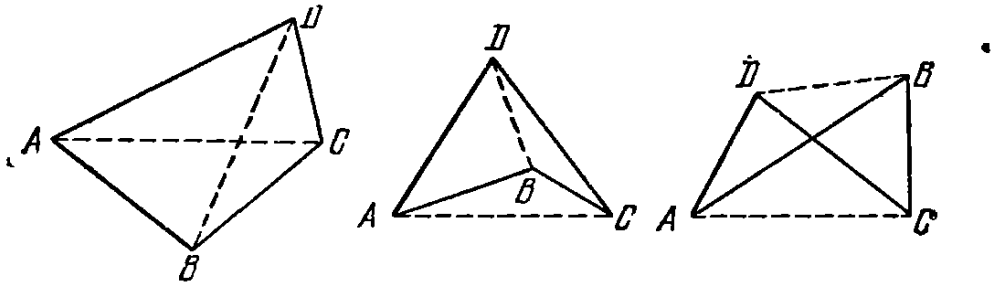


Рис. 44.

случае они называются *противоположными*. Аналогично, две вершины называются смежными, если они принадлежат одной стороне и противоположными в противном случае. Прямые, соединяющие пары противоположных вершин, называются диагоналями. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ имеет стороны AB, BC, CD, DA и диагонали AC и BD.

На рисунке 44 мы видим четырехугольники трех явно различных типов: *выпуклый* четырехугольник, обе диагонали которого находятся внутри него, четырехугольник *с входящим углом*, имеющий одну диагональ внутри себя, а другую вне, и *скрещенный* четырехугольник, обе диагонали которого находятся снаружи.

Мы, естественно, определяем *площадь* выпуклого четырехугольника как сумму площадей двух треугольников, на которые он разбивается диагональю:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = S_{BCD} + S_{DAB}.$$

Для того чтобы эта формула могла быть применена для четырехугольника с входящим углом, мы считаем площадь треугольника *положительной* или *отрицательной* в соответствии с тем, указаны ли вершины в порядке, обратном направлению движения часовой стрелки или по ее движению. Таким образом,

$$S_{ABC} = S_{BCA} = S_{CAB} = -S_{CBA}.$$

Например, четырехугольник с входящим углом, изображенный в центре рисунка 44, имеет площадь

$$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{DAB} = S_{CDA} - S_{CBA} = S_{CDA} + S_{ABC}.$$

Наконец, эта формула заставляет нас рассматривать площадь скрещенного четырехугольника как *разность* между площадями маленьких треугольников, из которых он составлен.

Если соединить идею направленных отрезков (§ 1 гл. 2) с соглашением $S_{ABC} = -S_{CBA}$, то это дает нам возможность расширить наше доказательство теоремы Чевы и ей обратной (1.21 и 1.22) и на те случаи, когда некоторые из точек X, Y и Z делят соответствующую сторону треугольника ABC в отрицательном отношении, т. е. внешним образом.

Следующая теорема, принадлежащая Пьеру Вариньону (1654—1722), столь проста, что вызывает удивление ее публикация лишь только в 1731 году.

Теорема 3.11. *Фигура, образованная путем последовательного соединения середин сторон четырехугольника, является параллелограммом, и его площадь равна половине площади четырехугольника.*

Напомним, что отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне и имеет длину, равную половине длины этой стороны. Возьмем четырехугольник $ABCD$; пусть серединами его сторон AB, BC, CD и DA будут точки P, Q, R и S, как на рисунке 45. Рассматривая треугольники ABD и CBD, мы заключаем, что отрезки PS и QR оба параллельны диагонали BD, а их длины равны $\frac{1}{2}|BD|$. Следовательно, четырехугольник $PQRS$ — параллело-

грамм *); его часто называют *параллелограммом Вариньона* четырехугольника $ABCD$.

Что касается площади, то мы имеем

$$S_{PQRS} = S_{ABCD} - S_{PBQ} - S_{RDS} - S_{QCR} - S_{SAP} =$$

$$= S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{CDA} - \frac{1}{4} S_{BCD} - \frac{1}{4} S_{DAB} =$$

$$= S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Читатель может при желании нарисовать четырехугольник $ABCD$ с входящим углом и убедиться, что такое разложение справедливо и в этом случае.

Так как диагонали любого параллелограмма при пересечении делятся пополам, то середины отрезков

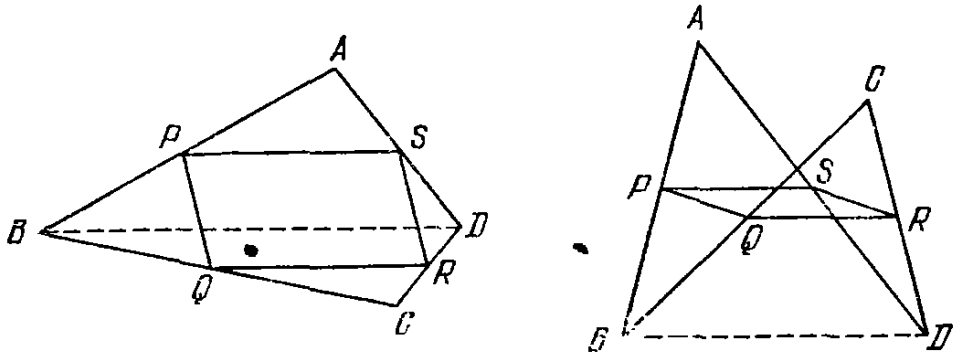


Рис. 45.

PR и QS совпадают с центром параллелограмма Вариньона (т. е. с точкой O на рисунке 46). Теперь, подобно тому, как отрезки AC и BD являются диагоналями четырехугольника $ABCD$, отрезки AD и BC являются диагоналями четырехугольника $ABDC$. Так как отрезок PR имеет только одну середину, то параллелограмм Вариньона нового четырехугольника $ABDC$ имеет тот же центр O. Следовательно, справедлива

Теорема 3.12. *Отрезки, соединяющие середины пар противоположных сторон произвольного четырехугольника, и отрезок, соединяющий середины диаго-*

*) Он останется параллелограммом даже в том случае, когда $ABCD$ будет не плоским, а пространственным четырехугольником.

налей, конкурентны и делят друг друга пополам. (Это — первая наша теорема о конкурентности.)

Большую пользу нам принесет следующий результат:

Теорема 3.13. *Если одна диагональ делит четырехугольник на два треугольника равной площади, то*

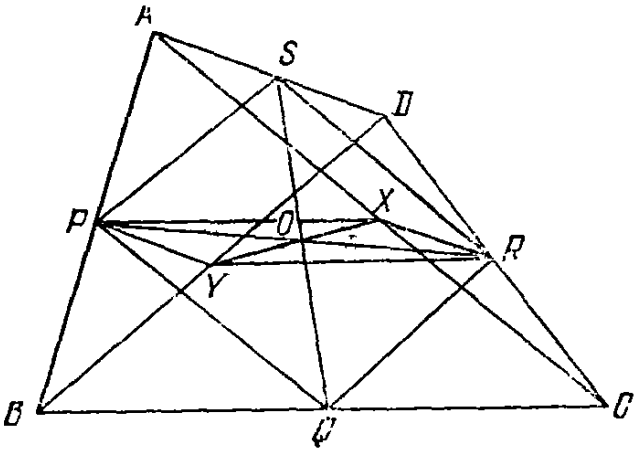


Рис. 46.

она делит пополам другую диагональ. И, наоборот, если одна диагональ делит пополам другую диагональ, то она делит пополам площадь этого четырехугольника.

Для того чтобы увидеть, почему это так, предположим, что отрезок BD делит четырехугольник $ABCD$ на два треугольника DAB и BCD равной площади, как на рисунке 47. Так как эти треугольники имеют одно и то же основание BD, то они имеют и равные высоты AH и CJ. Из конгруэнтности треугольников AHF и CJF мы выводим, что $|AF|=|CF|$. И, наоборот, если $|AF|=|CF|$, то эти треугольники конгруэнтны, $|AH|=|CJ|$ и $S_{DAB}=S_{BCD}$.

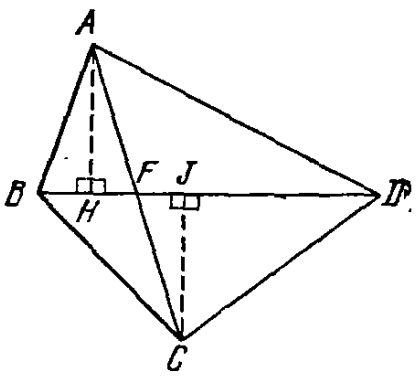


Рис. 47.

Теперь мы в состоянии доказать заключительную теорему этого параграфа:

Теорема 3.14. *Если противоположные стороны AD и BC четырехугольника ABCD пересекаются (при*

продолжении) в точке W, а точки X и Y являются серединами диагоналей AC и BD, то $S_{WXY} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

Сначала отметим середины P и R отрезков AB и CD, как на рисунке 48, и нарисуем отрезки PX, PY, RX, RY, RW. Прямая RY, соединяющая середины двух сторон треугольника BCD, параллельна отрезку BC и делит пополам «другую» диагональ DW четырех-

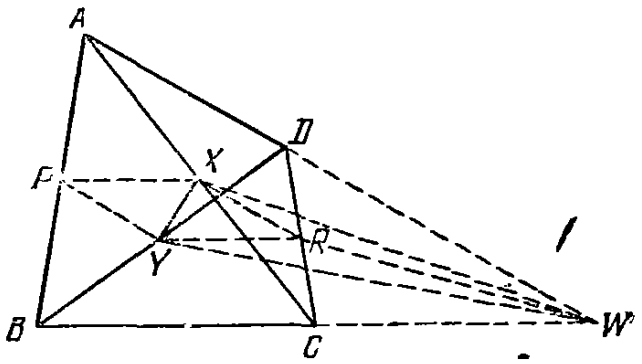


Рис. 48.

угольника $DYWR$. Следовательно, по «обратной» части теоремы 3.13

$$S_{RYW} = S_{YRD} = \frac{1}{4} S_{BCD}.$$

Подобным образом мы находим, что

$$S_{RWX} = \frac{1}{4} S_{CDA}.$$

Также, по теореме Вариньона, примененной к четырехугольнику $ABDC$,

$$S_{RXY} = \frac{1}{2} S_{PYRX} = \frac{1}{4} S_{ABDC} = \frac{1}{4} S_{CAB} + \frac{1}{4} S_{BDC} =$$

$$= \frac{1}{4} S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{BCD}.$$

Складывая последние три выражения, мы получаем

$$S_{WXY} = S_{RXY} + S_{RYW} + S_{RWX} = \frac{1}{4} S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{BCD} +$$

$$+ \frac{1}{4} S_{BCD} + \frac{1}{4} S_{CDA} = \frac{1}{4} S_{ABC} + \frac{1}{4} S_{CDA} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

Упражнения

1. Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме длин диагоналей первоначального четырехугольника.

2. Сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника равна сумме квадратов диагоналей плюс учетверенный квадрат длины отрезка, соединяющего середины диагоналей (рис. 49).

3. Для параллелограмма сумма квадратов длин его сторон равна сумме квадратов длин его диагоналей.

4. Если равнобочная трапеция имеет боковые стороны длины a, параллельные стороны длины b и c и диагонали длины d, то $d^2 = a^2 + bc$.

§ 2. Вписанные четырехугольники; теорема Брахмагупты

Множество, состоящее из E прямолинейных отрезков, соединяющих попарно V точек, рассмотрим как «систему», в которой отрезки играют роль твердых стержней, шарнирно соединенных между собой так, чтобы они все время оставались в одной плоскости. Ясно, что треугольник ($E = V = 3$) является жестким, в то время как четырехугольник ($E = V = 4$) имеет одну степень свободы: один из его углов может быть увеличен или уменьшен, что влечет за собой изменение других углов. Говорят, что система *строго жесткая*, если она жесткая, но перестает быть таковой после удаления любого из стержней. Сэр Гораций Лэмб ([23], стр. 93—94) дал простое доказательство того, что необходимым (хотя и не достаточным) условием строгой жесткости системы является соотношение

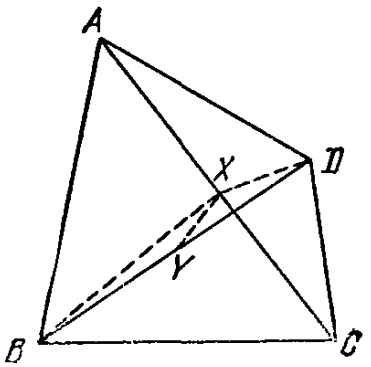


Рис. 49.

$$E = 2V - 3.$$

Например, $E = 5$, а $V = 4$. В этом случае мы имеем четырехугольник с одной диагональю; устранение этой диагонали дает упомянутую ранее степень свободы.

Любые четыре длины a, b, c, d, каждая из которых меньше суммы остальных трех, могут быть использованы в качестве длин сторон выпуклого четырехуголь-

ника. Степень свободы дает нам возможность уменьшать или увеличивать два противоположных угла до тех пор, пока они ни станут дополнительными, и тогда, как мы помним, все его четыре вершины будут лежать на окружности. Предположим, что длины диагоналей такого вписанного четырехугольника равны l и n (как обозначено на первом чертеже рис. 50). Разрезая четырехугольник $abcd$ вдоль его диагонали l и вновь соединяя его, при этом перевернув треугольник dal, мы получим новый четырехугольник $bcad$, вписанный в ту же окружность (как на втором чертеже рис. 50). Одной из его диагоналей является снова отрезок l. Рассекая вписанный четырехугольник вдоль

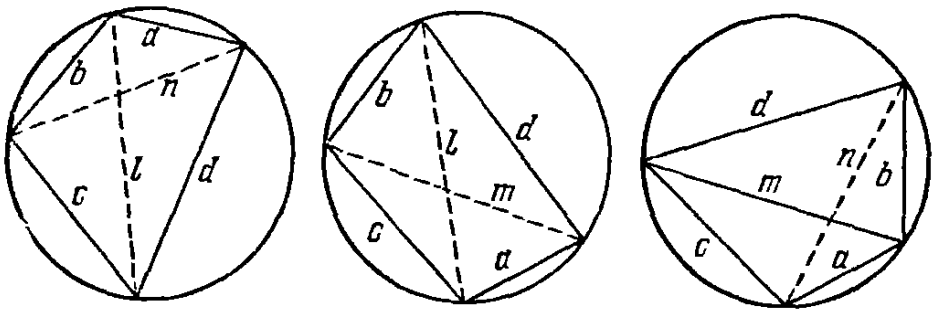


Рис. 50.

другой его диагонали m и соединяя его вновь после переворачивания треугольника dbm, мы получаем третий четырехугольник $cabd$, вписанный в ту же самую окружность (как на последнем чертеже рис. 50). Так как этот третий четырехугольник мог бы быть получен из первого рассечением вдоль диагонали n, то его диагонали имеют длины m и n, и никакие новые преобразования такого вида невозможны (исключая перевороты всего четырехугольника такие, как $abcd$ в $dcba$).

По теореме Птолемея (теорема 2.61)

$$mn = bc + ad, \quad nl = ca + bd, \quad lm = ab + cd.$$

Так как эти четырехугольники выпуклы, то мы можем считать площадь каждого суммой положительных площадей двух треугольников. Переворачивание треугольника описанным способом не меняет его положительной площади. Следовательно, все три четырехугольника имеют одну и ту же площадь (хотя ни-

какие два из них не конгруэнтны, если никакие две длины из a, b, c, d не окажутся равными). Эти наблюдения мы суммируем в следующем утверждении:

Теорема 3.21. *Любые четыре неравные длины, каждая из которых меньше суммы остальных трех, могут быть длинами сторон трех различных вписанных четырехугольников, имеющих одинаковую площадь.*

Следствие. *Площадь вписанного четырехугольника является симметрической функцией длин четырех его сторон.*

Точное выражение для этой функции было найдено в седьмом столетии нашей эры индийским математиком Брахмагуптой:

Теорема 3.22. *Если вписанный четырехугольник имеет длины сторон a, b, c, d и полупериметр s, то его площадь K равна*

$$K=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

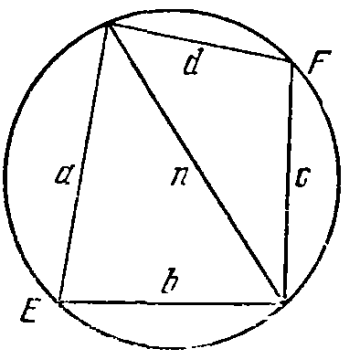


Рис. 51.

Изложим один из простейших методов получения формулы Брахмагупты, использующий тригонометрию. На рисунке 51 изображен вписанный четырехугольник $abcd$, где E — вершина, принадлежащая сторонам a и b, F — вершина, принадлежащая сторонам c и d, и n — диагональ, соединяющая две другие вершины. (Мы будем обозначать внутренние углы в вершинах E и F теми же буквами E и F.) Так как $E+F=180°$, мы имеем

$$\cos\hat{F}=-\cos\hat{E} \quad \text{и} \quad \sin\hat{F}=\sin\hat{E}.$$

По теореме косинусов

$$a^2+b^2-2ab\cos\hat{E}=n^2=c^2+d^2-2cd\cos\hat{F},$$

следовательно,

$$(3.221)\quad 2(ab+cd)\cos\hat{E}=a^2+b^2-c^2-d^2.$$

Так как

$$K=\tfrac{1}{2}ab\sin\hat{E}+\tfrac{1}{2}cd\sin\hat{F}=\tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin\hat{E},$$

мы также имеем

$$2(ab+cd)\sin\hat{E}=4K. \tag{3.222}$$

Возводя в квадрат и складывая выражения (3.221) и (3.222), мы получаем

$$4(ab+cd)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16K^2.$$

Следовательно,

$$16K^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$$

Повторно применяя тождество $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, мы находим

$$\begin{aligned}16K^2&=[2ab+2cd-(a^2+b^2-c^2-d^2)]\cdot\\&\quad\cdot[2ab+2cd+(a^2+b^2-c^2-d^2)]=\\&=[c^2+2cd+d^2-a^2+2ab-b^2]\cdot\\&\quad\cdot[a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2]=\\&=[(c+d)^2-(a-b)^2]\cdot[(a+b)^2-(c-d)^2]=\\&=[(c+d-a+b)(c+d+a-b)]\cdot\\&\quad\cdot[(a+b-c+d)(a+b+c-d)]=\\&=(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d),\end{aligned}$$

где $2s=a+b+c+d$. Это заканчивает доказательство.

Положив $d=0$ в теореме 3.22, мы получаем формулу Герона для величины площади треугольника через длины сторон a, b, c и полупериметр s

$$S_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Хотя она называется в честь Герона Александрийского (около 60 года нашей эры), однако ван дер Варден ([8], стр. 314, 373) разделяет мнение Белла ([3], стр. 58), приписывающего ее Архимеду (третье столетие до нашей эры).

Другое открытие Брахмагупты касается вписанных четырехугольников некоторого специального вида.

Теорема 3.23. *Если вписанный четырехугольник имеет перпендикулярные диагонали, пересекающиеся в точке P, то прямая, проходящая через точку P и*

перпендикулярная одной из его сторон, делит противоположную ей сторону пополам.

Ссылаясь на рисунок 52, где вписанный четырехугольник $ABCD$ имеет перпендикулярные диагонали AC и BD, а прямая PH перпендикулярна стороне BC и пересекает сторону DA в точке X, мы имеем

$$\widehat{DPX} = \widehat{BPH} = \widehat{PCH} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{XDP}.$$

Следовательно, треугольник XPD — равнобедренный. Аналогично, равнобедренным будет и треугольник XAP. Поэтому

$$|XA| = |XP| = |XD|.$$

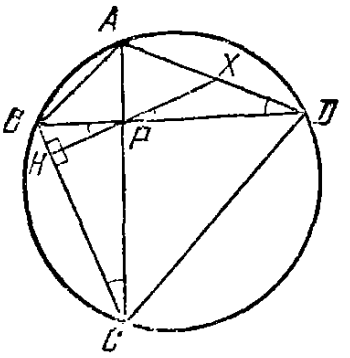


Рис. 52.

Упражиеиия

1. Если четырехугольник со сторонами, имеющими длины a, b, c, d, вписан в одну окружность и описан вокруг другой окружности, то его площадь выражается как

$$K = \sqrt{abcd}.$$

2. Найдите по формуле Герона площади треугольников со сторонами а) 13, 14, 15; б) 3, 14, 15.

3. Для треугольника ABC выразите радиус вписанной окружности r через s, $s-a$, $s-b$, $s-c$.

4. В обозначениях § 4, гл. 1

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R \quad \text{и} \quad S_{I_aI_bI_c} = 2sR.$$

5. В обозначениях рисунка 50 $K = lmn/4R$.

6. Как изменится результат упражнения 5, если мы положим $d = 0$?

7. Если выпуклый четырехугольник со сторонами a, b, c, d вписан в окружность радиуса R, то его площадь K выражается как

$$K = \sqrt{\frac{(bc+ad)(ca+bd)(ab+cd)}{16R^2}}.$$

8. Пусть две противоположные стороны вписанного четырехугольника при продолжении пересекаются в точке V, а две другие стороны — в точке W. Тогда внутренние биссектрисы углов V и W перпендикулярны.

9. Если произвольная точка P, лежащая в плоскости прямоугольника $ABCD$, соединена с его четырьмя вершинами, то

$$|PA|^2 - |PB|^2 + |PC|^2 - |PD|^2 = 0.$$

10. Если четырехугольник вписан в окружность, то произведение расстояний точки, лежащей на этой окружности, до двух противоположных сторон равно произведению расстояний этой точки до других двух сторон, а также произведению расстояний той же точки до диагоналей.

§ 3. Треугольники Наполеона

Теперь мы будем изучать некоторые фигуры, построенные с помощью треугольников и четырехугольников. Следующая легкая теорема была удивительным образом упущена из виду.

Теорема 3.31. *Пусть на сторонах произвольного треугольника построены во внешнюю сторону некоторые треугольники, обладающие тем свойством, что*

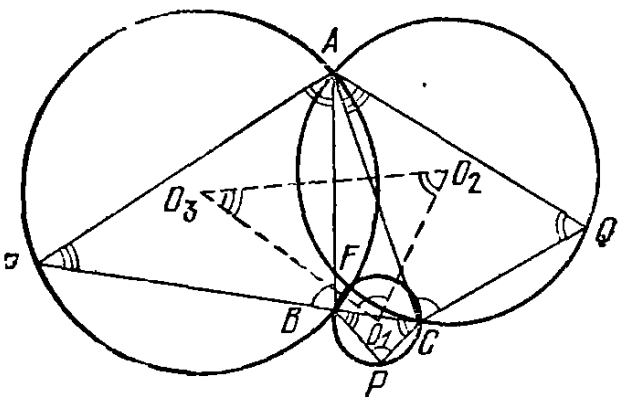


Рис. 53.

сумма их «отдаленных» углов равна 180°. *Тогда окружности, описанные вокруг этих трех треугольников, имеют общую точку.*

(Вот еще одна теорема о конкурентности!) Ее доказательство совсем просто. Пусть имеются, как на рисунке 53, треугольники CBP, ACQ, BAR, построенные на сторонах данного треугольника ABC и подобранные так, что углы P, Q, R удовлетворяют соотношению $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180°$. Окружности, описанные вокруг треугольников CBP и ACQ, пересекаются в точке C, а другую точку их пересечения обозначим, скажем, F. Соединяя точку F с точками A, B, C, мы видим, что

$$\widehat{BFC} = 180° - \hat{P}, \quad \widehat{CFA} = 180° - \hat{Q},$$

поэтому

$$\widehat{AFB} = 360° - (\widehat{BFC} + \widehat{CFA}) =$$

$$= 360° - (180° - \hat{P} + 180° - \hat{Q}) = \hat{P} + \hat{Q} = 180° - \hat{R}.$$

Следовательно, точка F лежит не только на окружностях, описанных вокруг треугольников CBP и ACQ, но и на окружности, описанной вокруг треугольника BAR.

Особый интерес представляют два частных случая:

Теорема 3.32. *Если вершины A, B, C треугольника ABC лежат соответственно на сторонах QR, RP, PQ треугольника PQR, то три окружности CBP, ACQ, BAR имеют общую точку.*

Теорема 3.33. *Если подобные треугольники PCB, CQA, BAR построены извне на сторонах треугольника ABC, то окружности, описанные вокруг этих трех треугольников, имеют общую точку.* (Заметьте, что из порядка, в котором мы назвали вершины подобных треугольников, следует, что углы при вершинах P, Q, R не являются соответственными углами этих треугольников.)

Теорема 3.32 была названа Фордером ([38], стр. 17) *теоремой о центре вращения.* Она была открыта А. Микелем в 1838 году. Меняя обозначения $PQRABC$ на $ABCA_1B_1C_1$ для приведения в соответствие с обозначениями на рисунке 18, мы можем столь же легко доказать ее и в несколько расширенной форме: *если ABC — треугольник и A_1, B_1, C_1 — любые три точки на прямых BC, CA, AB, то три окружности AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C имеют общую точку P.* В частном случае, когда отрезки AP, BP, CP являются их диаметрами, треугольник $A_1B_1C_1$ является педальным треугольником треугольника ABC относительно точки P. Закрепив треугольник ABC и точку P, мы можем вращать три прямые PA_1, PB_1 и PC_1 как единое целое вокруг «центра вращения» P на любой угол; при этом получается «косой педальный треугольник» $A_1B_1C_1$. Ясно, что окружности AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C продолжают проходить через точку P.

Точки A_1, B_1, C_1 не обязательно должны являться вершинами треугольника, они могут быть и коллинеарными, как на рисунке 35. В этом случае точки A_1,

B, C лежат на прямых B_1C_1, C_1A, AB_1 и тогда та же теорема утверждает, что три окружности ABC, A_1B_1C, A_1BC_1 имеют общую точку. Так как единственными общими точками последних двух окружностей являются точки A_1 и P, то нами доказана

Теорема 3.34. *Если четыре прямые пересекаются в шести точках A, B, C, A_1, B_1, C_1 так, что множествами коллинеарных точек являются $\{A_1, B, C\}$, $\{A, B_1, C\}$, $\{A, B, C_1\}$, $\{A_1, B_1, C\}$, то четыре окружности AB_1C_1, A_1BC_1, AB_1C, ABC имеют общую точку.*

В частном случае, когда у первых трех окружностей отрезки AP, BP, CP являются диаметрами, прямая A_1B_1 есть прямая Симсона точки P для треугольника ABC. Закрепив треугольник ABC и точку P, мы можем вращать три прямые PA_1, PB_1, PC_1 как единое целое вокруг точки P на произвольный угол и, таким образом, получить «косую прямую Симсона». Эта прямая содержит новые «основания» A_1, B_1, C_1, обладающие тем свойством, что три прямые PA_1, PB_1, PC_1 образуют *равные углы* (отсчитываемые в одну и ту же сторону) с тремя прямыми BC, CA, AB.

Теорема 3.33 имеет интересное следствие, связанное с *треугольником из центров* $O_1O_2O_3$ (рис. 53). Так как стороны O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 этого треугольника перпендикулярны общим хордам (или радикальным осям) пар окружностей, его угол $\hat{O}_1$ должен быть дополнительным к углу $\widehat{BFC}$, а это означает, что $\hat{O}_1 = \hat{P}$. Аналогично, $\hat{O}_2 = \hat{Q}$ и $\hat{O}_3 = \hat{R}$. Они являются тремя различными углами наших трех подобных треугольников.

Следовательно, справедлива

Теорема 3.35. *Если на сторонах произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные треугольники PCB, CQA, BAR, то центры описанных вокруг них окружностей образуют треугольник, подобный этим трем треугольникам.*

Ее частным случаем, изображенным на рисунке 54, является

Теорема 3.36. *Если на сторонах произвольного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники, то их центры образуют равносторонний треугольник.*

Известно, что Наполеон Бонапарт был немного математиком, причем он интересовался в основном геометрией. Рассказывают, что однажды Наполеон, тогда еще не ставший правителем Франции, вел дискуссию с великими математиками Лагранжем и Лапласом, во время которой Лаплас его резко прервал: «Менее всего мы хотим от вас, генерал, урока геометрии». В дальнейшем Лаплас стал его главным военным инженером.

Теорему 3.36 приписали Наполеону, хотя являются сомнительными его знания геометрии для такого под-

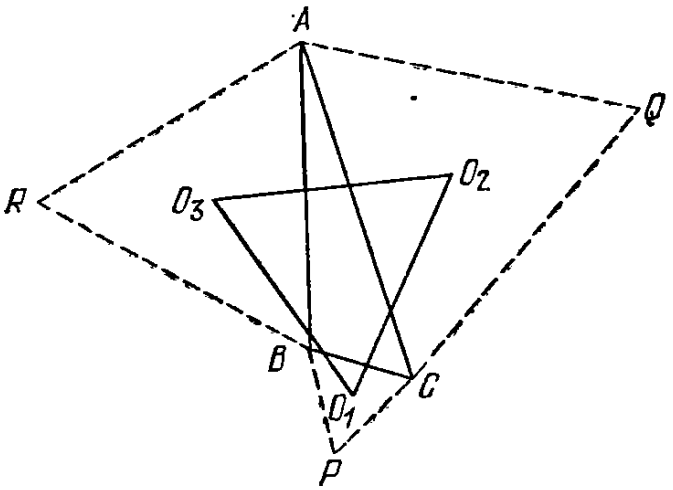


Рис. 54.

вига, равно как и его знания английского языка для составления знаменитого палиндрома *)

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA.

Во всяком случае, удобно называть треугольник из центров $O_1O_2O_3$ (в случае, когда треугольники PCB, CQA и BAR — равносторонние) *внешним треугольником Наполеона* для треугольника ABC. По аналогии, если равносторонние треугольники построены внутрь на сторонах треугольника ABC, как на рисунке 55, то их центры являются вершинами *внутреннего треугольника Наполеона* $N_1N_2N_3$. Таким образом, теорема 3.36

*) Палиндром — «перевертыш» — слово или фраза, имеющие одинаковый смысл при чтении слева направо и обратно, например, «искать такси». Смысл данного палиндрома можно перевести как «я был силен, пока не увидел Эльбу». — *Прим. перев.*

может быть кратко сформулирована следующим образом:

Внешний треугольник Наполеона является равносторонним.

И. М. Яглом ([43], т. I, стр. 40, 159) доказал это другим методом, совсем не похожим на наш, но имеющим то преимущество, что при помощи него также получается и аналогичная

Теорема 3.37. *Внутренний треугольник Наполеона является равносторонним.*

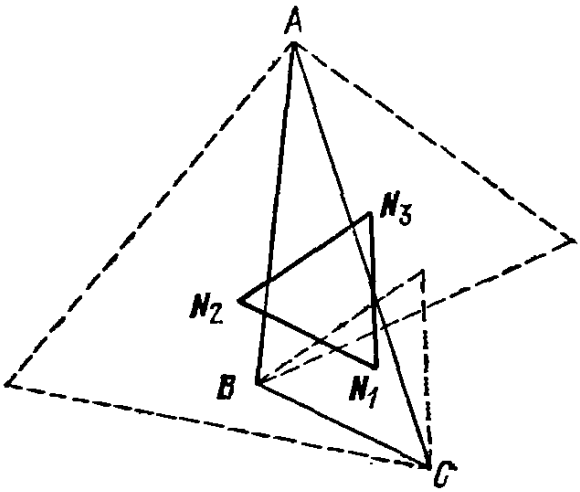


Рис. 55.

Другой подход, который тоже дает интересный промежуточный результат, состоит в применении теоремы косинусов к треугольнику AO_3O_2 (см. рис. 54). Так как AO_2 — радиус окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника со стороной $|CA|=b$, то его длина равна $b/\sqrt{3}$. Аналогично, $AO_3=c/\sqrt{3}$. Кроме того,

$$\widehat{O_3AO_2}=\hat{A}+60°.$$

Следовательно,

$$|O_2O_3|^2=\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{3}c^2-\frac{2}{3}bc\cos(\hat{A}+60°).$$

Так как вершины N_2 и N_3 внутреннего треугольника Наполеона могут быть получены из точек O_2 и O_3 сим-

метрией относительно прямых CA и AB соответственно, а $\widehat{N_3AN_2} = \hat{A} - 60°$, то мы также имеем

$$|N_2N_3|^2 = \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{2}{3}bc\cos(\hat{A} - 60°).$$

Путем вычитания получаем

$$|O_2O_3|^2 - |N_2N_3|^2 =$$

$$= \frac{2}{3}bc\,[\cos(\hat{A} - 60°) - \cos(\hat{A} + 60°)] =$$

$$= \frac{4}{3}bc\sin\hat{A}\cos 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}bc\sin A = \frac{4}{\sqrt{3}}S_{ABC}.$$

Аналогичным образом,

$$|O_1O_2|^2 - |N_1N_2|^2 = |O_3O_1|^2 - |N_3N_1|^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}S_{ABC},$$

и так как $|O_2O_3| = |O_3O_1| = |O_1O_2|$, то мы выводим, что

$$|N_2N_3| = |N_3N_1| = |N_1N_2|.$$

Вспоминая, что площадь равностороннего треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$, умноженному на квадрат длины его стороны, мы можем сформулировать «интересный промежуточный результат»:

Теорема 3.38. *Разность площадей внешнего и внутреннего треугольников Наполеона произвольного треугольника ABC равна площади треугольника ABC.*

В действительности (как мы видим на рисунке 55), внутренний треугольник Наполеона и треугольник ABC имеют противоположные направления обхода, так что площадь треугольника $N_1N_2N_3$ является отрицательным числом (или нулем) и точной формулой будет не

$$S_{O_1O_2O_3} - S_{N_1N_2N_3} = S_{ABC},$$

и

$$S_{O_1O_2O_3} - S_{N_3N_2N_1} = S_{ABC}$$

или

$$S_{O_1O_2O_3} + S_{N_1N_2N_3} = S_{ABC}.$$

1. Если на двух сторонах треугольника построены квадраты, то окружности, описанные вокруг них, пересекаются на окружности, построенной на третьей стороне, как на диаметре, и центры этих трех окружностей являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.

2. В обозначениях рисунка 54:

а) прямые PO_1, QO_2, RO_3 все проходят через точку O — центр окружности, описанной вокруг треугольника;

б) прямые AO_1, BO_2, CO_3 конкурентны;

в) отрезки AP, BQ, CR имеют равные длины, проходят через общую точку F трех описанных окружностей и пересекают друг друга под углом 60°. (Эта точка получила обозначение F в честь Ферма, установившего, что для этой точки сумма расстояний до вершин A, B и C является наименьшей, если углы треугольника не превышают 120°.)

3. В обозначениях рисунка 55 прямые AN_1, BN_2, CN_3 конкурентны.

4. Внешний и внутренний треугольники Наполеона имеют один и тот же центр.

§ 4. Теорема Менелая

Менелай Александрийский (приблизительно 100 год нашей эры, не путайте с Менелаем из Спарты) написал трактат, называемый «Sphaerica» (Сферика), в котором он использовал некоторое свойство сферического треугольника; он писал так, как будто аналогичное свойство плоского треугольника было уже хорошо известно. Может быть, это так и было, но поскольку никаких более ранних письменных упоминаний об этом не сохранилось, нам ничего не остается, как назвать соответствующее высказывание *теоремой Менелая*. Используя обозначения направленных отрезков (§ 1 гл. 2), ее можно сформулировать следующим образом (см. рис. 56 и 57):

Теорема 3.41. *Если точки X, Y, Z, лежащие на сторонах BC, CA, AB (соответственно продолженных), треугольника ABC коллинеарны, то*

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1.$$

Обратно, если это уравнение выполняется для точек X, Y, Z, лежащих на трех сторонах треугольника, то эти три точки коллинеарны.

. Пусть заданы коллинеарные точки X, Y, Z как на рисунке 56 или 57. Обозначим через h_1, h_2, h_3 длины перпендикуляров, опущенных из точек A, B, C на прямую XY, считая те из них положительными, которые находятся по одну сторону от этой прямой, и отрица-

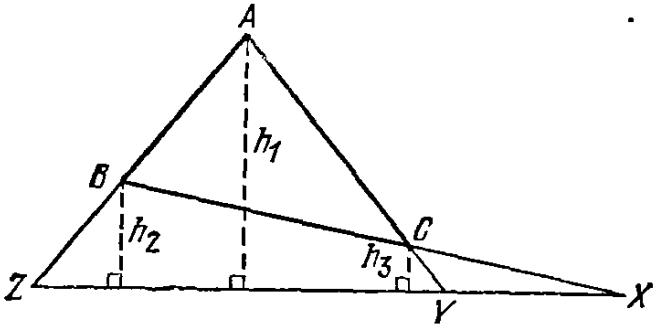


Рис. 56.

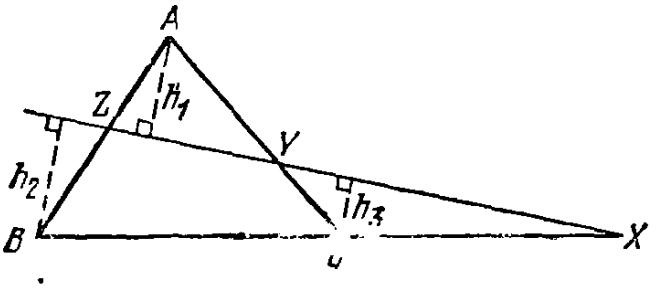


Рис. 57.

тельными те, которые лежат по другую сторону. Перемножив следующие три уравнения:

$$\frac{BX}{CX} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{CY}{AY} = \frac{h_3}{h_1}, \quad \frac{AZ}{BZ} = \frac{h_1}{h_2},$$

мы получим желаемый результат. (Заметим, что для того, чтобы разместить на сторонах треугольника ABC три различные коллинеарные точки X, Y, Z, всегда необходимо продолжить либо все три, либо только одну из сторон треугольника.)

Обратно, если точки X, Y, Z расположены на трех сторонах таким образом, что

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1,$$

то, обозначив через Z' точку пересечения прямых AB и XY, получим

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ'}{BZ'} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{AZ'}{BZ'} = \frac{AZ}{BZ},$$

т. е. точка Z' совпадает с точкой Z, и мы доказали, что точки X, Y, Z — коллинеарны.

Мы замечаем, что теорема Менелая дает критерий коллинеарности, так же как теорема Чевы (1.21 и 1.22) дает критерий конкурентности. Чтобы подчеркнуть их противоположность, мы можем выразить уравнение Менелая в другой форме:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1.$$

Упражнения

1. Биссектрисы внешних углов разностороннего треугольника пересекают соответствующие противоположные стороны в трех коллинеарных точках.

2. Биссектрисы двух внутренних углов разностороннего треугольника и биссектриса внешнего угла при третьей вершине пересекают соответствующие противоположные стороны в трех коллинеарных точках.

§ 5. Теорема Паппа

Теперь мы подходим к одной из важнейших теорем планиметрии. Она впервые была доказана Паппом Александрийским около 300 года нашей эры. Но лишь шестнадцать столетий спустя была признана ее роль в создании проективной геометрии. И тогда Папп был назван последним великим геометром древности. Эта выдающаяся теорема, носящая его имя, может быть сформулирована различными способами, один из которых дается ниже.

Теорема 3.51. *Если A, C, E — три точки на одной прямой, а B, D, F — на другой, и если три прямые AB, CD, EF пересекают прямые DE, FA, BC, соответственно, то три их точки пересечения L, M, N коллинеарны.*

«Проективная» природа этой теоремы видна из того, что она использует только принадлежность точек прямым или прохождение прямых через точки, без измерения длин или углов и даже без какой-либо ссылки на *порядок*: в каждом множестве из трех коллине-

арных точек безразлично, какая из них лежит между двумя другими. Рисунок 58 реализует одну из возможностей нарисовать чертеж, а рисунок 59 — другую такую возможность. Мы можем циклически переставить буквы A, B, C, D, E, F при условии, что соответственно переименуем точки L, M, N. Чтобы избежать рассмотрения бесконечно удаленных точек, которое завело бы нас слишком далеко в направлении проективной геометрии, давайте предположим, что три прямые AB, CD, EF образуют треугольник UVW, как на рисунке 60. Применяя теорему Менелая к пяти тройкам точек

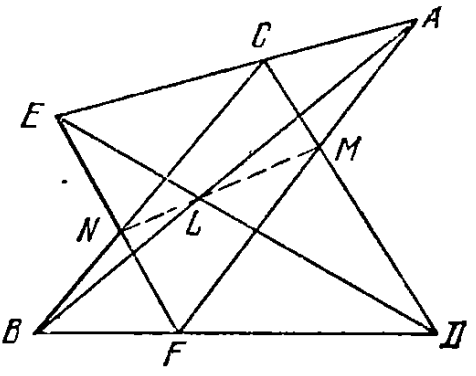


Рис. 58.

$\{L, D, E\}$, $\{A, M, F\}$, $\{B, C, N\}$, $\{A, C, E\}$, $\{B, D, F\}$,

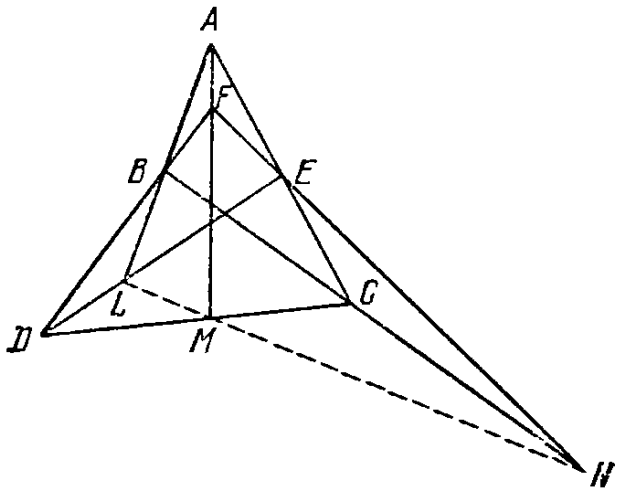


Рис. 59.

лежащих на сторонах этого треугольника, мы получаем:

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1,\quad \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FA}=-1,$$

$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV}=-1,\quad \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1,$$

$$\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV}=-1.$$

Разделив произведение первых трех соотношений на произведение последних двух и с наслаждением

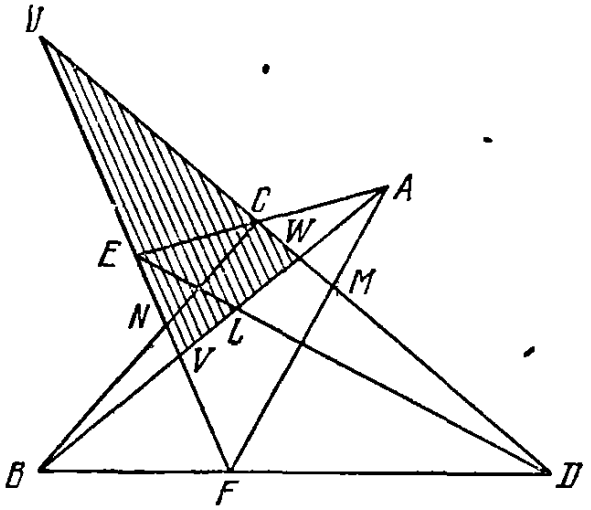


Рис. 60.

произведя массу сокращений, мы получаем

$$\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} = -1,$$

т. е. точки L, M, N коллинеарны, что и требовалось ([11], стр. 237 и [1], стр. 12).

Упражнения

1. Если A, C, E — три точки на одной прямой, B, D, F — на другой, и если две прямые AB и CD параллельны прямым DE и FA соответственно, то прямая EF параллельна прямой BC.

2. Пусть A, B, D, E, N, M — шесть точек, обладающих тем свойством, что прямые AE, DM, NB конкурентны и прямые AM, DB, NE конкурентны. Что можно сказать о прямых AB, DE, NM?

3. Пусть C и F — произвольные точки соответственно, на сторонах AE и BD параллелограмма $AEBD$. Обозначим через M и N точки пересечения прямой CD с прямой FA и прямой EF с прямой BC. Пусть прямая MN пересекает прямую DA в точке P, а прямую EB в точке Q. Тогда $|AP| = |QB|$.

4. Сколько точек и прямых, обозначенных буквами, находится на рисунке 58 (или рисунке 59)? Сколько таких прямых проходит через каждую из этих точек? Сколько таких точек лежит на каждой из этих прямых?

§ 6. Перспективные треугольники; теорема Дезарга

Первые шаги в разработке геометрической теории перспективы были сделаны архитектором Филиппом Брунеллески (1377—1446), которому принадлежит

проект восьмиугольного купола собора во Флоренции, а также проект палаццо Питти. Более глубокое изучение этой теории было проведено другим архитектором Жераром Дезаргом (1591—1661), чья теорема «о двух треугольниках», как было обнаружено позже, столь же важна, как и теорема Паппа. Хотя она может быть выведена из теоремы Паппа, однако этот вывод насыщен сложными деталями, и намного легче вывести ее из теоремы Менелая.

Если две одинаковые конфигурации, составленные из точек и прямых, могут быть приведены в соответствие так, что пары соответствующих точек соединяются прямыми, пересекающимися в одной точке, то мы говорим, что эти две конфигурации *перспективны относительно этой точки.* Если соответствие таково, что пары соответствующих прямых пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то мы говорим, что эти две конфигурации *перспективны относительно этой прямой* *).

Утверждение теоремы Дезарга о двух треугольниках, записанное в духе проективной геометрии, выглядит следующим образом: *если два треугольника перспективны относительно точки, то они перспективны и относительно прямой.* Однако, чтобы избежать сложностей, связанных с рассмотрением случаев параллельности прямых, мы удовлетворимся следующей ее перефразировкой:

Теорема 3.61. *Если два треугольника перспективны относительно точки и если их пары соответствующих сторон пересекаются, то эти три точки пересечения коллинеарны.*

Вновь мы имеем теорему лишь о принадлежности точек прямым и пересечении прямых. Рисунки 61 и 62 являются двумя из многих способов нарисовать такой чертеж. Здесь треугольники PQR и $P'QR'$ перспективны относительно точки O, а пары их соответствующих сторон пересекаются в точках D, E, F. (Некоторые примеры перспективных треугольников уже были рассмотрены в упражнении 2 § 3, где каждые два из трех

*) В русской математической литературе указанную точку принято называть центром перспективы, а прямую — осью перспективы. — *Прим. перев.*

треугольников ABC, PQR, $O_1O_2O_3$ перспективны относительно точки.)

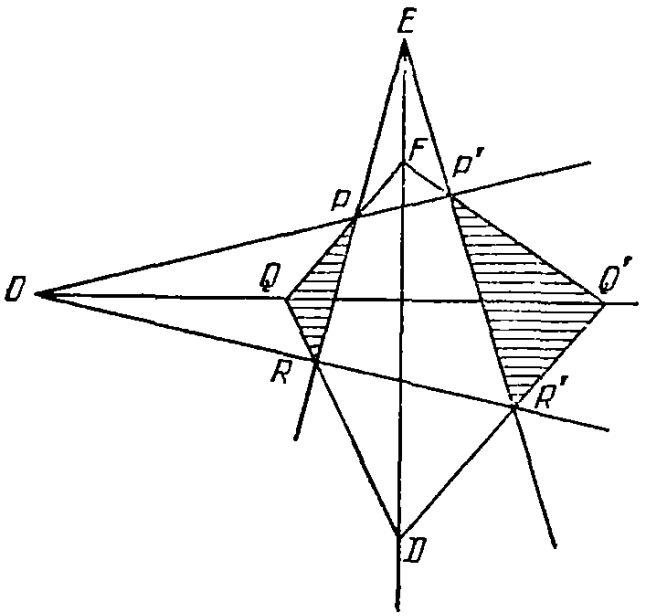


Рис. 61.

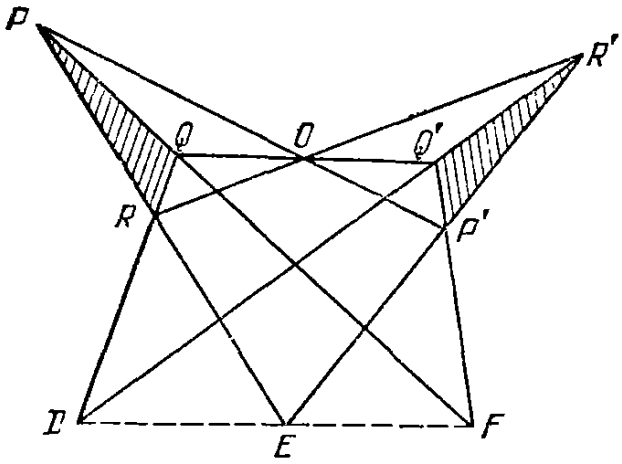


Рис. 62.

Для доказательства мы применим теорему 3.41 к тройкам точек

$$\{D, R', Q'\}, \{E, P', R'\}, \{F, Q', P'\},$$

лежащих на сторонах трех треугольников

$$OQR, ORP, OPQ,$$

получив при этом

$$\frac{QD}{RD}\cdot\frac{RR'}{OR'}\cdot\frac{OQ'}{QQ'}=1,\quad \frac{RE}{PE}\cdot\frac{PP'}{OP'}\cdot\frac{OR'}{RR'}=1,$$

$$\frac{PF}{QF}\cdot\frac{QQ'}{OQ'}\cdot\frac{OP'}{PP'}=1.$$

Перемножив эти три выражения и проделав умеренное число сокращений, получим

$$\frac{QD}{RD}\cdot\frac{RE}{PE}\cdot\frac{PF}{QF}=1,$$

откуда следует, что точки D, E, F коллинеарны, что и требовалось ([11], стр. 231 и [1] стр. 17).

Теорема Дезарга, как легко видеть, подразумевает существование обратной к ней: *если два треугольника перспективны относительно прямой, то они перспективны относительно точки.* Удовлетворимся следующей ее записью:

Теорема 3.62. *Если два треугольника перспективны относительно прямой и если две пары соответствующих вершин соединяются пересекающимися прямыми, то эти треугольники перспективны относительно точки пересечения этих прямых.*

Объявляя, что треугольники PQR и $P'Q'R'$ перспективны относительно прямой, мы подразумеваем, что имеются три коллинеарные точки *)

$$D=QR\cdot Q'R',\quad E=RP\cdot R'P',\quad F=PQ\cdot P'Q',$$

как на рисунке 61. Если определить точку $O=PP'\cdot RR'$, то утверждение теоремы можно переписать в следующем виде: точка O коллинеарна с точками Q и Q'. Так как треугольники FPP' и DRR' перспективны относительно точки E, то мы можем к ним

---

*) Из контекста будет ясно, в каком случае символом типа AB обозначается вся прямая, проходящая через точки A и B, а не просто отрезок, ограниченный ими. Общую точку двух непараллельных прямых AB и DE удобно обозначать через $AB\cdot DE$. Это обозначение не так страшно, как символ $(A\oplus B)\cap(D\oplus E)$, предпочитаемый некоторыми авторами.

применить теорему 3.61 и сделать вывод, что точки пересечения пар соответствующих сторон, а именно

$$O = PP' \cdot RR', \quad Q' = P'F \cdot R'D, \quad Q = FP \cdot DR,$$

коллинеарны, что и требовалось.

Это пример чисто «проективного» доказательства.

Упражнения

1. Если два треугольника перспективны относительно точки и две пары соответствующих сторон параллельны, то и две оставшиеся стороны параллельны. (В этом случае говорят, что два треугольника *гомотетичны*, как в упражнении 3 § 2 гл. 1.)

2. Сколько точек и прямых, обозначенных буквами, имеется на рисунке 61 (или 62)? Сколько таких прямых проходит через каждую из этих точек? Сколько таких точек лежит на каждой из прямых?

3. Назовите два треугольника, которые перспективны относительно а) точки P, б) точки P', в) точки D.

4. Что можно сказать о вершинах и сторонах двух пятиугольников $DFP'OR$ и $EPQQ'R'$ (см. рис. 61). Имеются ли на рисунке другие пятиугольники, обладающие теми же свойствами?

5. Две непараллельные прямые нарисованы на листе бумаги так, что их точка пересечения находится вне этого листа. Через точку P, находящуюся между этими прямыми на листе бумаги, постройте прямую, которая проходила бы (при достаточном продолжении) через точку пересечения данных прямых. Что дало бы то же самое построение, если бы мы его применили к двум параллельным прямым?

§ 7. Шестиугольники

Говорят, что две вершины шестиугольника являются *смежными*, *чередующимися* или *противоположными* в зависимости от того, разделяются они одной стороной, двумя или тремя сторонами. Таким образом, в шестиугольнике $ABCDEF$ вершины F и B смежны с вершиной A, вершины E и C — чередующиеся с вершиной A и вершина D противоположна вершине A. Отрезок, соединяющий две противоположные вершины, называется диагональю. Таким образом, шестиугольник $ABCDEF$ имеет три диагонали: AD, BE, CF. Аналогично, этот шестиугольник имеет три пары *противоположных сторон*: AB и DE, BC и EF, CD и FA.

Данный шестиугольник может быть обозначен как $ABCDEF$ двенадцатью способами: любая из шести его вершин может быть обозначена буквой A, любая из

двух смежных с ней вершин может быть обозначена буквой B, и тогда обозначения остальных определяются алфавитным порядком.

Шесть данных точек, никакие три из которых не коллинеарны, могут быть обозначены буквами A, B, C, D, E, F $6! = 720$ способами. Каждый способ определяет шестиугольник $ABCDEF$, имеющий в качестве вершин шесть данных точек. Следовательно, число различных шестиугольников, определяемых шестью точками, равно

$$\frac{720}{12} = 60.$$

На рисунке 63 показаны три из шестидесяти шестиугольников, определяемых шестью точками, лежащими на окружности. Хотя мы привыкли к первому («выпуклому») типу, мы не должны пренебрегать и дру-

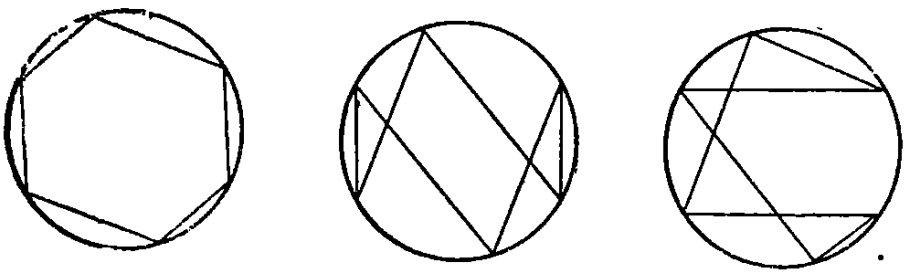


Рис. 63.

гими пятьюдесятью девятью возможными шестиугольниками, которые могут быть получены с помощью тех же шести точек.

В § 1 мы потребовали, чтобы никакие три *последовательные* вершины многоугольника не были коллинеарны. Однако коллинеарность других вершин допустима. В частности, теорема 3.51 (теорема Паппа) может быть перефразирована следующим образом:

Если каждое множество из трех чередующихся вершин шестиугольника является множеством трех коллинеарных точек, и три пары противоположных сторон пересекаются, то эти три точки пересечения являются коллинеарными.

Упражнения

1. Если две противоположные стороны BC и EF шестиугольника $ABCDEF$ параллельны диагонали AD, а две противоположные стороны CD и FA параллельны диагонали BE, и при этом

оставшиеся стороны DA и AB также параллельны, то третья диагональ CF параллельна стороне AB, и центроиды треугольников ACE и BDF совпадают.

2. Даны две тройки коллинеарных точек. Сколько существует способов построить шестиугольник так, чтобы точки каждой тройки были его чередующимися вершинами?

§ 8. Теорема Паскаля

Мы подошли к замечательной теореме, открытой философом и математиком Блезом Паскалем (1623—1662) в шестнадцатилетнем возрасте.

Теорема 3.81. *Если все шесть вершин шестиугольника лежат на окружности и три пары противоположных сторон пересекаются, то эти три точки пересечения коллинеарны.*

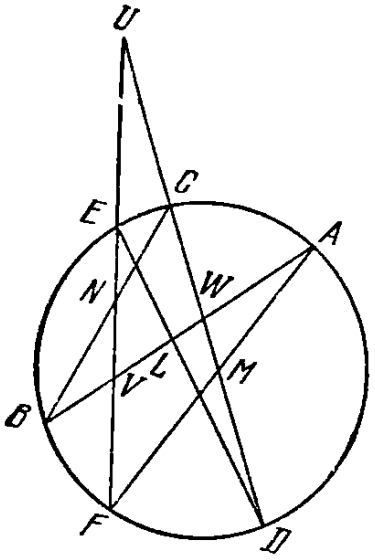


Рис. 64.

Никто не знает, как Паскаль доказывал ее, потому что подлинный текст доказательства был утерян. Однако до того, как он был потерян, его видел и хвалил Г. В. Лейбниц (открывший одновременно с Ньютоном дифференциальное и интегральное исчисления). Такое положение вещей стимулирует попытки восстановить потерянное доказательство, т. е. дать доказательство, используя только результаты и методы, существовавшие во времена Паскаля. Одно такое доказательство, использующее только первые три книги Евклида, было дано Фордером ([39], стр. 13); но это tour de force *), а вероятнее всего, Паскаль использовал теорему Менелая так же, как и в приведенном здесь доказательстве.

На рисунке 64 показан один из многих способов расположения шестиугольника $ABCDEF$, вписанного в окружность. (Читатель может легко увидеть, какие изменения понадобятся в рассуждениях при ином его расположении, например, если те же самые шесть вершин соединить одним из пятидесяти девяти других

*) Ловкий трюк (франц.) — *Прим. перев.*

возможных способов.) Мы хотим доказать, что следующие три точки пересечения

$$L = AB \cdot DE, \quad M = CD \cdot FA, \quad N = BC \cdot EF$$

коллинеарны.

Предположим, что три прямые AB, CD, EF образуют треугольник UVW, как на рисунке 64. Применяя теорему 3.41 к трем тройкам точек LDE, AMF, BCN, лежащих на сторонах этого треугольника UVW, мы получим

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} = 1, \quad \frac{VA}{WA} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UF}{VF} = 1,$$

$$\frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} \cdot \frac{UN}{VN} = 1.$$

Перемножая все эти три выражения и замечая, что по теореме 2.11

$$\frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} \cdot \frac{VA}{WA} \cdot \frac{UF}{VF} \cdot \frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} =$$

$$= \frac{UE \cdot UF}{UC \cdot UD} \cdot \frac{VA \cdot VB}{VE \cdot VF} \cdot \frac{WC \cdot WD}{WA \cdot WB} = 1,$$

мы получаем

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UN}{VN} = 1,$$

поэтому точки L, M, N коллинеарны, что и требовалось *).

Прямая, содержащая эти три точки L, M, N, называется *прямой Паскаля* шестиугольника $ABCDEF$. Как мы видели в § 7, эти же шесть точек определяют шестьдесят шестиугольников; следовательно, они определяют (вообще говоря) шестьдесят прямых Паскаля. Эти шестьдесят прямых образуют очень интересную конфигурацию: некоторые их подмножества конкурентны, а некоторые подмножества точек их пересечения коллинеарны, и т. д.

*) Эта попытка реконструкции доказательства Паскаля появилась в 18-м издании книги Теодора Спикера (Theodor Spieker, «Lehrbuch der ebenen Geometrie, Potsdam, 1888). См. также [11], стр. 235, [29], стр. 26 или [43] т. II, стр. 80, 115, 193. Другая попытка была предложена авторами этой книги — см. H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer «L'hexagramme de Pascal. Un essai pour reconstituer cette découverte» Le Jeune Scientifique (Joliette, Quebec) 2 (1963), стр. 70—72.

Как следует из сохранившейся короткой работы Паскаля «Опыт о конических сечениях» («Essay pour les coniques»), он хорошо знал, что его теорема применима не только к шестиугольнику, вписанному в окружность, но и к шестиугольнику, вписанному в коническое сечение. Обратная к ней теорема, доказанная независимо Вильямом Брекенриджем и Колином Маклореном, содержится в любом учебнике по проективной геометрии, например ([18], стр. 125).

Если три пары противоположных сторон шестиугольника пересекаются в трех коллинеарных точках, то шесть его вершин лежат на коническом сечении, которое может вырождаться в пару прямых (как в теореме 3.51).

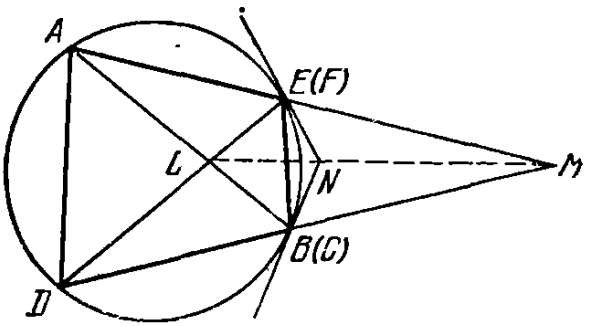


Рис. 65.

Если позволить вершинам вписанного шестиугольника сливаться, при этом внимательно следя за тем, чтобы сохранились их обозначения, то мы сможем вывести несколько интересных теорем о вписанных пятиугольниках и четырехугольниках. В таких случаях сторона, конечные точки которой сливаются, превращается в точку, а прямая, содержащая ее, переходит в касательную к этой окружности (или коническому сечению) в этой точке. Рассмотрим, например, вписанный четырехугольник $ADBE$, изображенный на рисунке 65. Считая, что скрещенный четырехугольник $ADBE$ является вырождением шестиугольника, при котором вершина B совпала с вершиной C, а вершина E — с вершиной F, мы можем применить теорему Паскаля, утверждение которой будет состоять в том, что касательные в точках B и E пересекаются в точке N, лежащей на прямой, соединяющей точки

$$L = AB \cdot DE \quad \text{и} \quad M = BD \cdot EA.$$

Упражнения

1. Если пять из шести вершин шестиугольника лежат на окружности и три пары противоположных сторон пересекаются в трех коллинеарных точках, то и шестая вершина лежит на той же окружности.

2. У вписанного четырехугольника $ABCE$ с непараллельными сторонами касательные в точках A и C пересекаются на прямой, соединяющей точки $AB \cdot CE$ и $BC \cdot EA$.

§ 9. Теорема Брианшона

Ш. Ж. Брианшон (1760—1854) открыл интересную теорему (в некотором смысле связанную с теоремой Паскаля) о свойстве шестиугольника, описанного вокруг конического сечения. Доказательство Брианшона использует «двойственность» точек и прямых, характерную для проективной геометрии. Однако случай, когда коническое сечение является окружностью, был вызовом математикам на поиски для него евклидовского доказательства. На этот вызов успешно ответил А. С. Смогоржевский ([34], стр. 28). Для понимания его доказательства необходима следующая лемма:

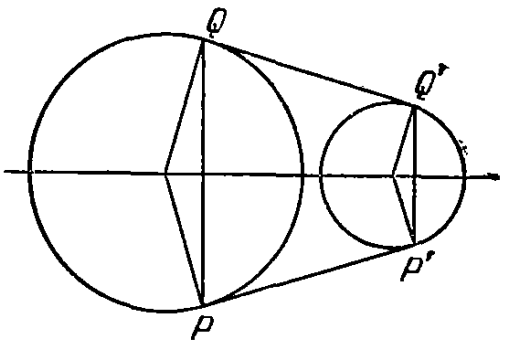


Рис. 66.

Пусть к окружности в точках P и Q проведены касательные и пусть точки P' и Q' лежат на этих касательных (соответственно) по одну сторону от прямой PQ, так что $|PP'| = |QQ'|$. Тогда существует окружность, касающаяся прямых PP' и QQ' в точках P' и Q' соответственно.

Действительно, фигура, изображенная на рисунке 66, симметрична относительно серединного перпендикуляра к отрезку PQ, являющегося также серединным перпендикуляром к отрезку $P'Q'$, а кроме того, и диаметром данной окружности. Перпендикуляры к отрезкам PP' и QQ' в точках P' и Q' пересекают эту «среднюю линию» — ось симметрии — в одной и той же точке, которая является центром искомой окружности.

Теперь мы можем перейти к доказательству Смогоржевского:

Теорема 3.91. *Если все шесть сторон шестиугольника касаются окружности, то три его диагонали конкурентны (или параллельны).*

Пусть R, Q, T, S, P, U — точки касания шести касательных AB, BC, CD, DE, EF, FA, как на рисунке 67. Для простоты предположим, что шестиугольник $ABCDEF$ — выпуклый, тогда все его три диагонали

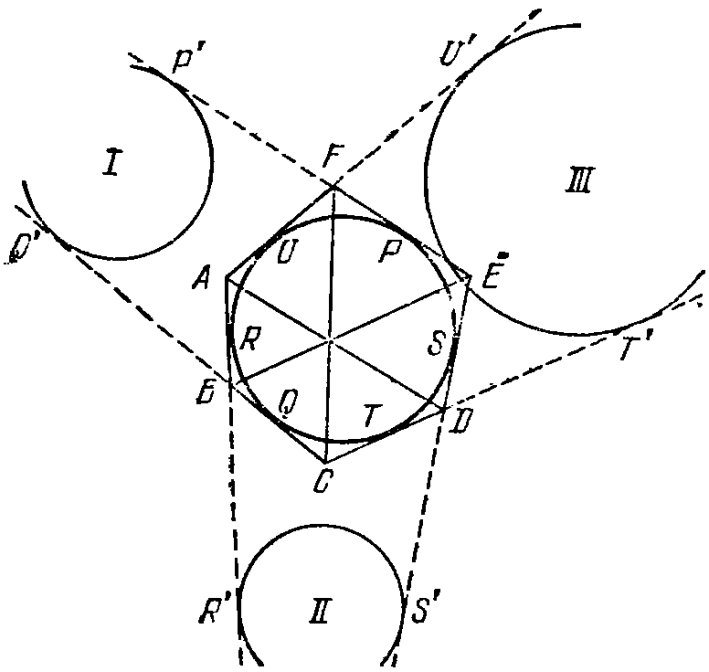


Рис. 67.

являются секущими вписанной окружности (и исключается возможность их параллельности). На прямых EF, CB, AB, ED, CD, AF (продолженных) возьмем точки P', Q', R', S', T', U' так, что

$$|PP'|=|QQ'|=|RR'|=|SS'|=|TT'|=|UU'|,$$

(длина этих отрезков может иметь любое удобное значение) и построим окружность I (касающуюся прямых PP' и QQ' в точках P' и Q'), окружность II (касающуюся прямых RR' и SS' в точках R' и S') и окружность III (касающуюся прямых TT' и UU' в точках T' и U') в соответствии с леммой.

Теперь мы используем тот известный факт, что две касательные к окружности, проведенные из одной точки, имеют равные длины. Так как $|AR|=|AU|$ и $|RR'|=|UU'|$, то, сложив их, мы получаем $|AR'|=|AU'|$. Так как $|DS|=|DT|$ и $|SS'|=|TT'|$, то, вычитая, мы получаем $|DS'|=|DT'|$. Таким образом, точки A и D имеют равные степени (§ 2 гл. 2) относительно окружностей II и III, а соединяющая их прямая AD совпадает с *радикальной осью* этих двух окружностей. Аналогично, отрезок BE лежит на радикальной оси окружностей I и II, а отрезок CF лежит на радикальной оси окружностей III и I. Как мы видели в § 3 гл. 2, *радикальные оси трех несоосных окружностей, взятых попарно, конкурентны* (или параллельны). Мы представили диагонали нашего шестиугольника в качестве радикальных осей трех окружностей. Так как эти диагонали, очевидно, не могут совпасть, то эти окружности не являются соосными, и доказательство закончено.

Обратная теорема, относящаяся к проективной геометрии, формулируется следующим образом ([19], стр. 83).

Если три диагонали шестиугольника конкурентны, то шесть его сторон касаются конического сечения, которое может вырождаться в пару точек (подобную паре точек FL для шестиугольника $ABDENM$ в упражнении 2 § 5).

Если позволить сторонам сливаться, при этом внимательно следя за тем, чтобы сохранились их обозначения, то мы сможем вывести несколько интересных теорем о пятиугольниках и четырехугольниках, описанных вокруг окружности. В таких случаях общая вершина двух совпадающих сторон становится их точкой касания с окружностью (или коническим сечением).

Рассмотрим, например, пятиугольник $ABCDE$, описанный вокруг окружности (как показано на рисунке 68). Считая, что он является вырождением шестиугольника $ABCDEF$ с «развернутым углом» в точке F, мы можем применить теорему Брианшона, утверждение которой будет состоять в том, что *точка касания стороны EA пятиугольника $ABCDE$, описанного*

вокруг окружности, лежит на отрезке, соединяющем точку C с точкой пересечения AD·BE.

Подобным же образом, четырехугольник *BCEF*, описанный вокруг окружности, стороны которого *FB* и *CE* касаются окружности в точках *A* и *D*, можно рассматривать как вырожденный шестиугольник (рис. 69). В результате этого мы приходим к выводу,

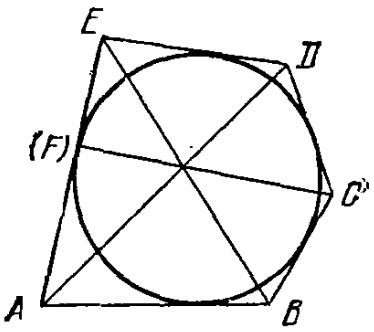


Рис. 68.

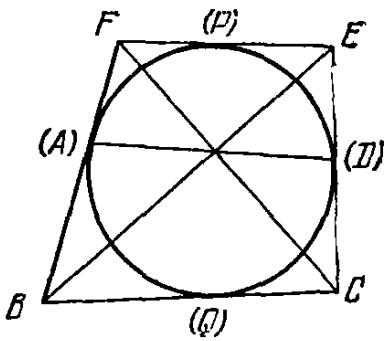


Рис. 69.

что диагонали *BE* и *CF* четырехугольника пересекаются на прямой *AD*, которая соединяет точки касания сторон *FB* и *CE* с окружностью.

Упражнения

1. На рисунке 69 прямая *PQ*, соединяющая две другие точки касания, также проходит через точку пересечения диагоналей.

2. На рисунке 69 считайте, что фигура *ABQCEF* является шестиугольником. Какие прямые являются конкурентными в этом случае?

3. Дает ли теорема Брианшона новый подход к упражнению 3 § 4 гл. 1?

Глава 4

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Господь с тобой, Мотоки! Господь с тобой! Тебя преобразили.

В. Шекспир. «Сон в летнюю ночь» (перевод *М. Лозинского*).

В замечании, приведенном в конце § 6 гл. 1, мы установили перпендикулярность прямых FD и OD (см. рис. 14) как следствие того, что они могут быть получены из перпендикулярных прямых HD и CB поворотом на равные углы α вокруг точек D и B соответственно. В преамбуле к теореме 1.71 мы видели, что у подобных треугольников ABC и $A'B'C'$ центроиды совпадают и что, так как их ортоцентрами являются точки H и O, то $|AH| = 2|OA'|$. Наконец, в обсуждении, последовавшем за теоремой 1.81, мы использовали разворот, чтобы поменять местами ортоцентры двух конгруэнтных треугольников $A'B'C'$ и KLM. Поворот, дилатация и разворот являются тремя примерами *преобразования*, которое мы будем понимать, имея в виду рассматриваемый здесь круг вопросов, как отображение всей плоскости на себя такое, что каждая точка P отображается в единственную точку P', а каждой точке Q' соответствует единственный прообраз Q. Идея «отображения» имеет первостепенное значение во многих областях математики, например, когда мы описываем функцию $y = f(x)$, то мы отображаем множество значений переменной x на множество соответствующих значений переменной y.

Евклидова геометрия является только одной из многих геометрий, каждая из которых имеет свои собственные исходные понятия, аксиомы и теоремы. Феликс Клейн в речи, прочитанной им в 1872 году при вступлении на кафедру в немецком городе Эрлангене, предложил классификацию геометрий в соответствии с теми группами преобразований, использование которых не меняет понятий, аксиом и теорем. Обычная

евклидова геометрия характеризуется группой *подобий*, которые могут быть описаны как преобразования, *сохраняющие углы*. Важным частным случаем подобия является *изометрия*, которая может рассматриваться как преобразование, *сохраняющее длины*, например, поворот и, в частности, разворот. Изометрия лежит в основе известного нам понятия *конгруэнтности*: две фигуры конгруэнтны в том и только в том случае, если можно преобразовать одну в другую с помощью изометрии.

§ 1. Параллельный перенос

Помимо *тождественного преобразования*, при котором каждая точка переходит в ту же самую точку, наиболее известным является *параллельный перенос*, сохраняющий расстояния между любыми двумя точками и направление прямой, проходящей через них.

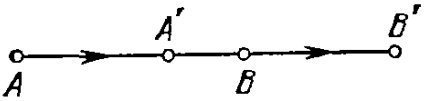


Рис. 70.

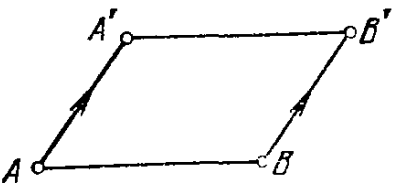


Рис. 71.

Если отрезок $A'B'$ является образом отрезка AB при параллельном переносе, то либо точки A, B, A', B' лежат на прямой, как на рисунке 70, либо $AA'B'B$ — параллелограмм, как на рисунке 71. (В первом случае мы, естественно, говорим о *вырожденном параллелограмме* $AA'B'B$.) Таким образом, параллельный перенос определяется заданием направленного отрезка AA', и с тем же успехом он может быть определен при помощи любого отрезка из бесконечного множества других, имеющих ту же длину и направление, например, BB'. Другим названием параллельного переноса служит слово *вектор*, и мы будем пользоваться обозначением $\vec{AA'} = \vec{BB'}$. В частности, тождественное преобразование может рассматриваться как параллельный перенос на нулевое расстояние или как нуль-вектор.

Тот факт, что параллельный перенос сохраняет форму и размеры любой фигуры, используется в доказательствах различных теорем о площадях. Например (рис. 72), при выводе обычной формулы площади параллелограмма $ABCD$ с острым углом при вершине A мы отрезаем прямоугольный треугольник AHD и

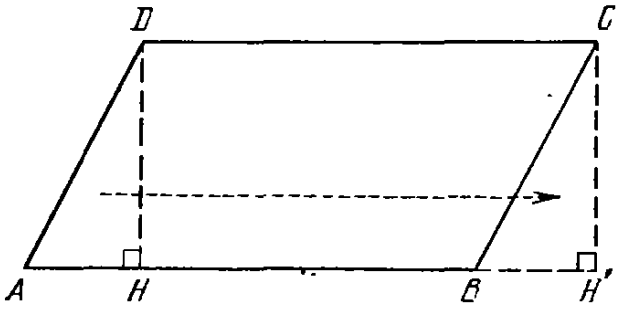


Рис. 72.

приклеиваем его вновь, перенеся параллельно в положение $BH'C$, в результате чего получается прямоугольник $HH'CD$.

Рисунок 73 иллюстрирует задачу о вписывании в данную окружность прямоугольника, обладающего тем свойством, что две его противоположные стороны

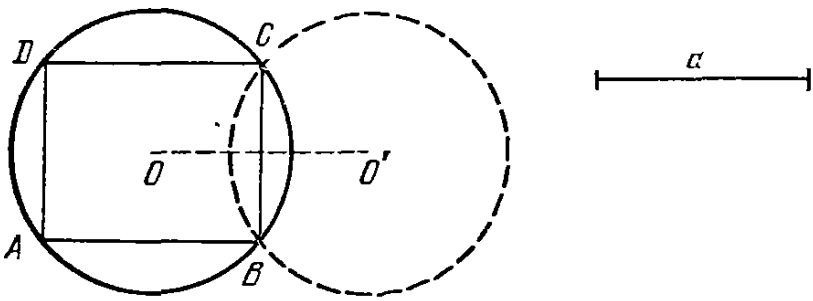


Рис. 73.

параллельны данному отрезку a и имеют с ним одинаковую длину. Эта задача может быть решена при помощи параллельного переноса данной окружности на любой из двух векторов, соответствующих отрезку a. Если старое и новое положения окружности имеют общие точки B и C, то они будут двумя вершинами искомого прямоугольника $ABCD$, стороны которого AB и CD параллельны отрезку a и имеют с ним одинаковую длину.

Упражнения

1. «Впишите» в треугольник ABC (рис. 74) отрезок, равный и параллельный данному отрезку a.

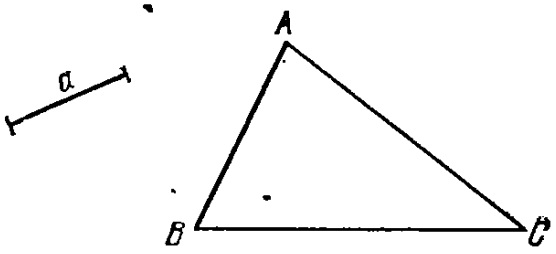


Рис. 74.

2. Нарисуйте несколько из бесконечного множества положений, которые может занимать образ равностороннего треугольника при параллельных переносах на векторы, равные сумме вектора $\vec{AB}$, умноженного на целое число, и вектора $\vec{AC}$, умноженного на целое число.

§ 2. Поворот

Другим видом преобразований, сохраняющих расстояния, является *поворот*. При этом вся плоскость поворачивается вокруг некоторой точки на заданный угол. Таким образом, размеры и форма любой фигуры остаются неизменными, а все ее точки движутся по дугам концентрических окружностей. Центр вращения (который может как принадлежать, так и не принадлежать вращаемой фигуре) является единственной неподвижной точкой.

В качестве примера использования поворота рассмотрим следующую ситуацию. Пусть дан треугольник ABC (рис. 75) и пусть на его сторонах построены внешним образом равносторонние треугольники BPC, CQA и ARB. Нарисовав прямые BQ и CR, пересекающиеся в точке F, мы замечаем, что поворот на 60° вокруг точки A переводит треугольник ARC в треугольник ABQ. Следовательно, $\widehat{RFB} = 60°$ и $|RC| = |BQ|$. Подобными рассуждениями показывается, что $|PA| = |CR|$. Таким образом,

$$|AP| = |BQ| = |CR|.$$

Более того, так как

$$\widehat{RFB} = 60° = \widehat{RAB}. \quad \text{и} \quad \widehat{CFQ} = 60° = \widehat{CAQ},$$

то четырехугольники $ARBF$ и $CQAF$ являются вписанными; и так как $\widehat{BFC}=120°$, а $\widehat{CPB}=60°$, то и четырехугольник $BPCF$ также является вписанным. Поэтому окружности, описанные вокруг трех треугольников BPC, CQA, ARB, проходят через точку F. Она называется *точкой Ферма* треугольника ABC. Определив ее как точку пересечения прямых BQ и CR, мы теперь видим, что она должна также лежать и на прямой AP.

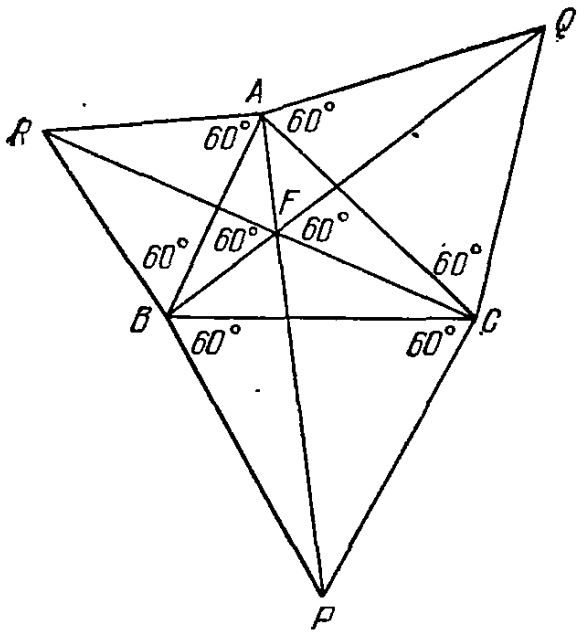


Рис. 75.

В евклидовом доказательстве теоремы Пифагора квадраты $CBIG$, $ACKJ$, $BADE$ построены внешним образом на сторонах данного прямоугольного треугольника ABC, при этом последний квадрат разбивается продолжением высоты CH на две части, как на рисунке 76. Точками O_1, O_2, O_3 обозначены центры этих трех квадратов, а связь точек U, V, W, X, Y с другими точками и линиями видна из рисунка. Хотя существуют более легкие способы доказать теорему Пифагора, доказательство Евклида интересно уже тем, что из рассматриваемого рисунка можно получить много неожиданных результатов.

Нарисовав прямые AI, BJ, CD и CE, мы видим, что поворот на 90° вокруг точки A переводит треугольник ADC в треугольник ABJ. Поэтому $|BJ|=|DC|$ и

отрезок BJ перпендикулярен отрезку CD. Аналогично, отрезки AI и CE равны и перпендикулярны.

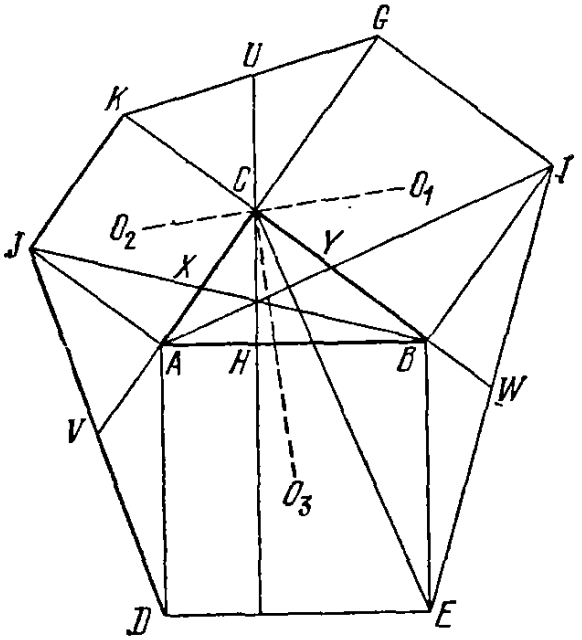


Рис. 76.

Из подобия треугольников BCX и BKJ, а также CAY и GAI, вытекают следующие соотношения:

$$\frac{|CX|}{b}=\frac{|CX|}{|KJ|}=\frac{|BC|}{|BK|}=\frac{a}{a+b},$$

$$\frac{|CY|}{a}=\frac{|CY|}{|GI|}=\frac{|CA|}{|GA|}=\frac{b}{a+b},$$

откуда

$$|CX|=\frac{ab}{a+b}=|CY|.$$

Упражнения

1. Центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах параллелограмма, являются вершинами квадрата ([43], т. 1, стр. 21, 161).

2. В обозначениях рисунка 76 докажите, что

а) три прямые AI, BJ, CH — конкурентны;

б) отрезки O_1O_2 и CO_3 перпендикулярны, а их длины равны;

в) точки U, V, W являются серединами отрезков GK, JD, EI.

3. На плоскости дана точка P. Постройте равносторонний треугольник, одна из вершин которого отстоит от точки P на расстояние 2, вторая — 3, а третья — 4 (выбранных единиц длины).

§ 3. Разворот

Один из случаев поворота, подобно параллельному переносу, обладает свойством переводить каждую прямую в параллельную ей прямую. Это *разворот* или поворот на 180°, который переводит каждый луч в противоположно ему направленный луч. Очевидно, что разворот полностью определяется заданием его центра. Так как параллельный перенос переводит каждый луч в параллельный ему луч, то результат двух последовательно выполненных разворотов является таким же, как и в случае параллельного переноса. Короче говоря, «сумма» двух разворотов есть параллельный перенос, который превращается в тождественное преобразование, если оба разворота имеют один и тот же центр. Чтобы

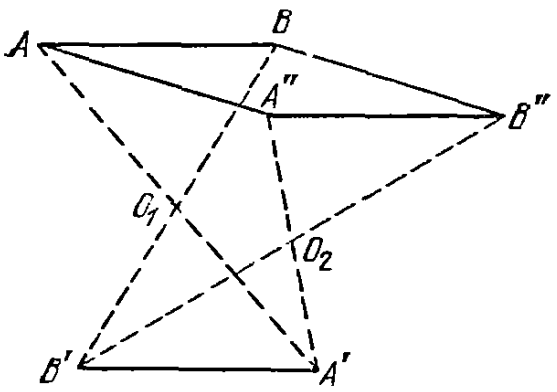


Рис. 77.

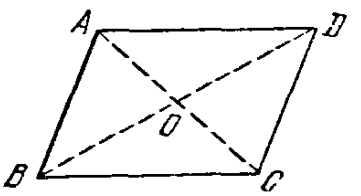


Рис. 78.

лучше понять действие этого преобразования, рассмотрим следующий пример: пусть точки A, B и C лежат на прямой так, что точка B является серединой отрезка AC. Рассмотрим разворот, оставляющий точку A неподвижной, и разворот относительно точки B, переводящий точку A в точку C. Сумма этих двух разворотов является параллельным переносом $\overrightarrow{AC}$, а также суммой разворотов вокруг точек B и C.

На рисунке 77 проиллюстрирована сумма разворотов вокруг точек O_1 и O_2. Отрезок AB сначала переводится в отрезок $A'B'$ (противоположно направленный), а затем в отрезок $A''B''$; таким образом, их суммой является параллельный перенос $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$.

Многие старые и хорошо знакомые теоремы можно доказать гораздо проще, используя развороты. На рисунке 78 точка O одновременно является серединой

двух отрезков AC и BD. Разворот вокруг точки O, переводящий отрезок AB в отрезок CD, показывает, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Рассмотрим рисунок 79, на котором точки M и N — середины отрезков AB и AC. Мы видим, что сумма разворотов вокруг этих двух точек вновь является параллельным переносом $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{BC}$, откуда следует, что

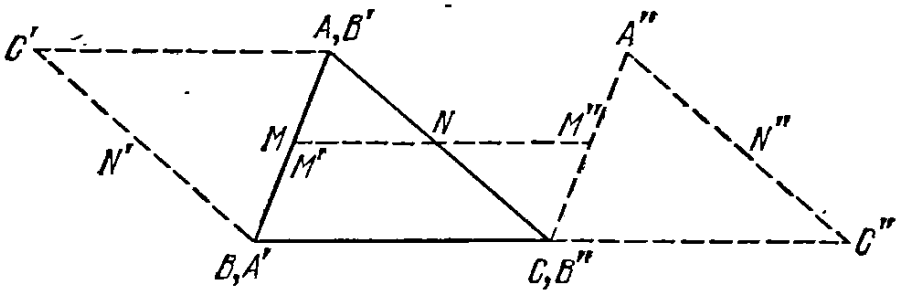


Рис. 79.

отрезок MN параллелен отрезку BC, а его длина вдвое меньше длины отрезка BC.

Упражнения

1. Пусть A — общая точка двух пересекающихся окружностей. Постройте прямую, проходящую через точку A так, чтобы высекаемые ею хорды имели одинаковую длину.

2. Через точку A, лежащую вне данной окружности, проведите прямую, пересекающую окружность в точках P и Q таких, что $|AP| = |PQ|$.

3. Если противоположные стороны шестиугольника равны и параллельны, то диагонали (соединяющие противоположные вершины) конкурентны.

§ 4. Симметрия

Третьим типом преобразований, сохраняющих расстояния, является *симметрия* относительно прямой HK, называемой *осью симметрии*. Каждая точка, принадлежащая оси (например, H или K), остается на месте, т. е. является симметричной самой себе. Образ точки A, не принадлежащий оси, есть точка A', которая лежит на перпендикуляре, проходящем через точку A, причем ось делит пополам отрезок AA'. На рисунке 80 отрезок $A'B'$ является образом отрезка AB. Довольно просто показать, что если точка C лежит на прямой AB, то ее образ C' принадлежит прямой $A'B'$.

В трапеции $AA'B'B$ диагонали AB' и $A'B$ являются образами друг друга; их общая точка X, являясь симметричной самой себе, лежит на оси HK. Из свойств вертикальных углов следует, что $\widehat{AXH} = \widehat{B'XK}$, а из конгруэнтности треугольников BXK и $B'XK$ вытекает, что $\widehat{B'XK} = \widehat{KXB}$. Следовательно,

$$\widehat{AXH} = \widehat{KXB}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что кратчайшим путем от произвольно заданной точки A до оси и далее к данной точке B, лежащей по ту же сторону от оси, является ломаная AXB. Действительно, как видно из

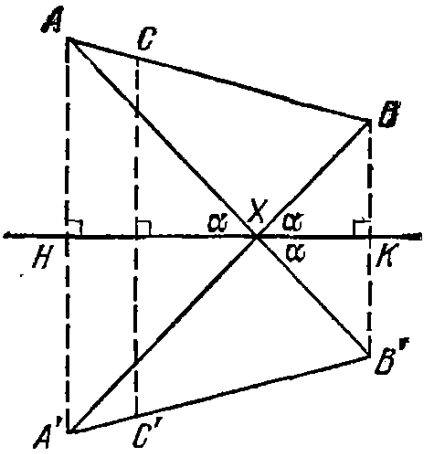


Рис. 80.

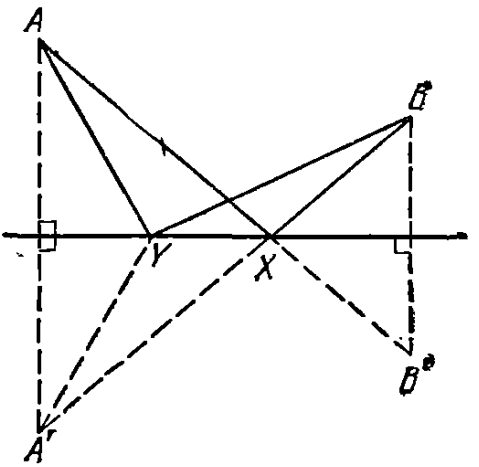


Рис. 81.

рисунка 81, если взять любую другую точку Y на оси, то длина ломаной AYB будет равна $|AY|+|YB| = |A'Y|+|YB|$ и будет больше, чем длина отрезка $|A'B| = |AX|+|XB|$.

Это, в частности, дает нам способ геометрического решения известной экстремальной задачи, не прибегая к помощи вычислений. Физики утверждают, что луч света, движущийся из точки A к зеркалу, и далее к другой точке B, выбирает такой путь, при котором время движения было бы наименьшим. В однородной среде это время пропорционально пройденному пути. Поэтому луч света, который идет из точки A в точку B, отражаясь в зеркале и падая на зеркало под углом α, отражается от него под тем же углом. Итак,

это является следствием требования, что путь должен иметь наименьшую длину. Физики обычно измеряют углы, отсчитывая их от *нормали* — перпендикуляра к

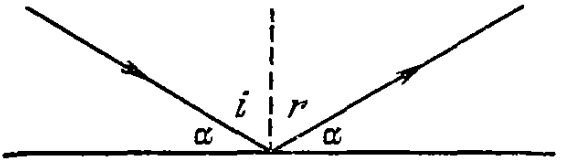


Рис. 82.

зеркалу, вместо того чтобы отсчитывать их от самого зеркала. Угол i, изображенный на рисунке 82, называется углом падения, а угол r — углом отражения.

Упражнения

1. Дан разносторонний треугольник ABC со сторонами, способными отражать свет. Определите, где на стороне AB нужно установить источник света, чтобы выпущенный из него луч, последовательно отразившись в двух других сторонах, вернулся в ту же точку?

Указание. См. § 6 гл. 1.

2. Среди всех треугольников с заданными основанием и площадью равнобедренный имеет наименьший периметр.

3. Проделайте упражнение 1 § 3, используя симметрию.

§ 5. Задача Фаньяно

Свойства зеркального отражения могут быть использованы для вывода (притом весьма изящного) многих интересных теорем. Мы применим эти свойства для решения задачи нахождения треугольника наименьшего периметра, вписанного в данный остроугольный треугольник, известной как задача Фаньяно*).

Решение начнем с того, что в произвольный остроугольный треугольник ABC (рис. 83) впишем его ортотреугольник (изображенный штриховой линией) и лю-

*) Она была предложена в 1775 г. Фаньяно, который решил ее при помощи вычислений. Доказательство, приведенное здесь, принадлежит Г. А. Шварцу. Другие доказательства, также использующие симметрию, см. Коксетер [17], стр. 39 или Казаринов [26], стр. 76—77, или Курант и Роббинс [21], стр. 380. Метод Шварца был перенесен с треугольников на $(2n+1)$-угольники Франком Морлеем и Ф. В. Морлеем в книге: Frank Morley and F. V. Morley, Inversive Geometry, Boston, Ginn, 1933, стр. 37.

бой другой треугольник (изображенный пунктирной линией). Затем последовательно будем отражать $\triangle ABC$ вместе с проведенными внутри него линиями относительно сторон AC, CB, BA, AC, CB. Теперь исследуем полученный рисунок, чтобы увидеть все, что произошло с нашими треугольниками.

Если не принимать во внимание две точки, помеченные буквой C, то остальные вершины образуют ломаную линию $BABABA$, углы которой (измеряемые против движения часовой стрелки) равны: $2\hat{A}$ в первой точке A (верхняя слева), $2\hat{B}$ во второй точке B (в середине), $-2\hat{A}$ во второй точке A (снизу) и $-2\hat{B}$ в

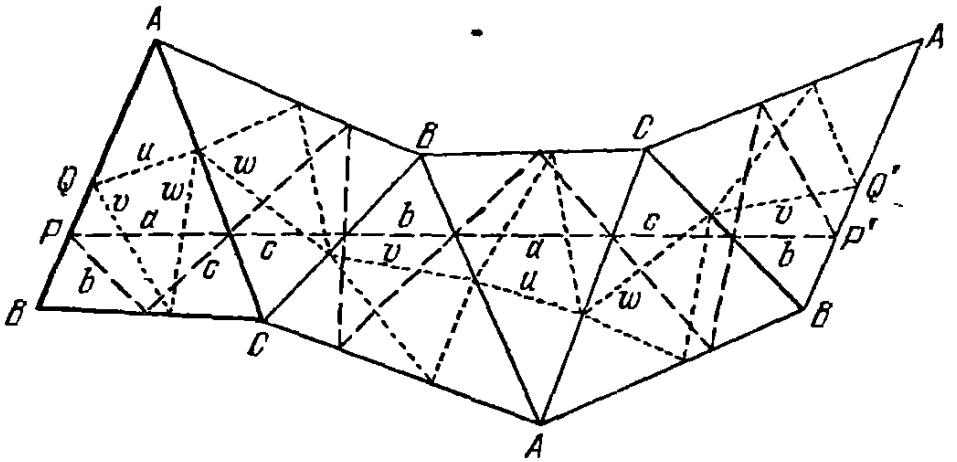


Рис. 83.

третьей точке B (справа). Из того, что сумма этих четырех углов равна нулю, следует, что сторона BA, полученная в результате последнего отражения, является образом стороны BA исходного треугольника при параллельном переносе; при этом пары соответствующих точек на этих двух сторонах образуют параллелограмм такой, как, например, $RP'Q'Q$.

Теперь мы вспомним, что высоты треугольника ABC делят пополам углы его ортотреугольника. Отсюда следует, что после указанных отражений стороны этого ортотреугольника будут последовательно отложены на прямой PP', как показано на рисунке 83. Аналогично, стороны любого другого треугольника такого, как треугольник, изображенный на рисунке пунктирной линией, образуют ломаную, которая связывает точку Q (на исходной стороне AB) с точкой Q'

(на последней из полученных сторон AB). Так как отрезок PQ равен и параллелен отрезку $P'Q'$, то длина отрезка QQ' равна длине отрезка PP', которая в свою очередь равна удвоенному периметру ортотреугольника. Ясно, что отрезок QQ' короче, чем ломаная, связывающая точки Q и Q', длина которой равна удвоенному периметру другого треугольника. Следовательно, треугольником с минимальным периметром является ортотреугольник.

§ 6. Задача о трех кувшинах

Любопытно применение симметрии*) к решению задач, в которых требуется разделить жидкость на определенные порции с помощью инструментов, казалось бы, совсем не приспособленных для этого. Для того чтобы показать, как это делается, необходимо предварительно описать трилинейные координаты, что мы сейчас и сделаем.

Как правило, для нанесения точек с заданными декартовыми координатами используется обычная миллиметровая бумага. Для наших же целей лучше использовать «триангулированную» бумагу, т. е. бумагу, на которой проведены три системы параллельных линий, разбивающих ее плоскость на маленькие равносторонние треугольники. На такой бумаге удобно наносить точки, задаваемые *трилинейными* координатами относительно (большого) равностороннего треугольника. В плоскости такого треугольника ABC со стороной a и высотой h трилинейные координаты точки P определяются, как расстояния x, y, z точки P от трех его сторон BC, CA, AB. Эти расстояния считаются положительными, когда точка P внутри треугольника. Введем для точки P обозначение (x, y, z). Так как

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az =$$

$$= S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB} = S_{ABC} = \frac{1}{2}ah,$$

*) M. C. K. Tweedie, Mathematical Gazette 23 (1939), стр. 278—282; Я. И. Перельман, Занимательная геометрия, М., Физматгиз, 1958; T. H. O'Beirne, [27], стр. 49—75.

то мы имеем

$$x+y+z=h.$$

Такими координатами можно идеально представить любую ситуацию, в которой три переменные величины имеют постоянную сумму. В том случае, когда одна из величин остается постоянной, а две другие изменяются (с постоянной суммой), точка (x, y, z) движется по прямой, параллельной одной из сторон треугольника. В частности, сами стороны описываются уравнениями

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0,$$

а вершины A, B, C имеют координаты $(h, 0, 0)$, $(0, h, 0)$, $(0, 0, h)$.

Именно такая ситуация возникает в том случае, когда h литров жидкости разливается по трем сосудам так, чтобы в первом сосуде было x литров, во втором — y литров и в третьем — z литров. Постепенному переливанию жидкости из второго сосуда в третий соответствует движение точки (x, y, z) по прямой $x = \text{const}$ в направлении, соответствующем уменьшению y и соответственному увеличению z. Если каждый сосуд может вмещать h литров (такую ситуацию мы будем обозначать символом $[h; h, h, h]$), то каждая из координат может принимать любое значение от 0 до h, и множество точек, в которые можно попасть, как-то переливая жидкость из одного сосуда в другой — это множество мы назовем *областью операций*, — совпадает с треугольником ABC и задается неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant h, \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \quad 0 \leqslant z \leqslant h.$$

Гораздо больший интерес представляет случай $[h; a, b, c]$, где $h \geqslant a > b > c$. Теперь три данных сосуда имеют емкости a, b, c, и задача состоит в том, чтобы отмерить определенную величину α жидкости, многократно переливая ее из одного сосуда в другой; при этом мы или полностью опорожняем один сосуд, или до краев наполняем другой (или, возможно, делаем и то, и другое сразу). Область операций теперь примет вид

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c.$$

Она, как правило, будет (правильным или неправильным) шестиугольником, ограниченным шестью прямыми

$$x=0,\quad x=a,\quad y=0,\quad y=b,\quad z=0,\quad z=c.$$

Но в частных случаях она может превратиться в пятиугольник, трапецию, параллелограмм или (как мы уже видели) охватывать весь равносторонний треугольник.

Например, на рисунках 84 и 85 проиллюстрирована ситуация [8; 7, 6, 3], в которой 8 литров жидкости

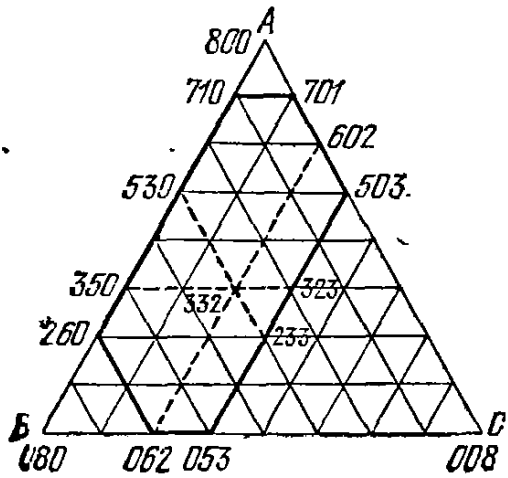


Рис. 84.

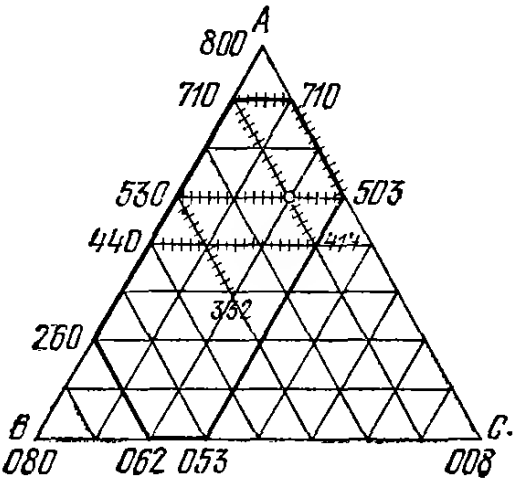


Рис. 85.

некоторым заданным образом разлиты в сосуды емкостью 7, 6, 3 литров. Мы хотим отмерить, скажем, 4 литра. Теперь областью операций станет шестиугольная область

$$0\leqslant x\leqslant 7,\quad 0\leqslant y\leqslant 6,\quad 0\leqslant z\leqslant 3,$$

которая ограничена шестью прямыми

$$x=7,\quad z=0,\quad y=6,\quad x=0,\quad z=3,\quad y=0,$$

и имеет вершины

(7, 1, 0), (2, 6, 0), (0, 6, 2), (0, 5, 3), (5, 0, 3), (7, 0, 1)

или в сокращенной форме: 710, 260, 062, 053, 503, 701.

На рисунке 84 выделена точка 332, которая представляет общий случай: 3 литра в первом сосуде,

столько же во втором и 2 литра в третьем. Ломаная, исходящая из этой точки, указывает шесть возможных операций по переливанию. Путь от точки 332 до точки 530 соответствует процессу опорожнения последнего сосуда в первый, а движению в противоположную сторону от точки 332 до точки 233 соответствует процесс наполнения третьего сосуда из первого. Пути от точки 332 до точки 062 соответствует процесс опустошения первого сосуда во второй, который тем самым наполняется.

Заштрихованные прямые на рисунке 85 показывают один из нескольких способов прохождения из точки 332 в точку 440 и, таким образом, деления 8 литров на две равные порции. Весь путь есть ломаная, которая идет всегда параллельно одной из сторон исходного треугольника и поворачивает только тогда, когда она достигает какой-нибудь стороны или вершины шестиугольника, ограничивающего область операций. Если бы мы, придерживаясь тех же правил, продолжали этот путь (минуя точку 440), то, в конце концов, достигли бы всех точек на границе области операций, имеющих целые координаты. Из этого следует, что в ситуации [8; 7, 6, 3] указанным образом может быть отмерено любое целое число литров (меньше, чем 8).

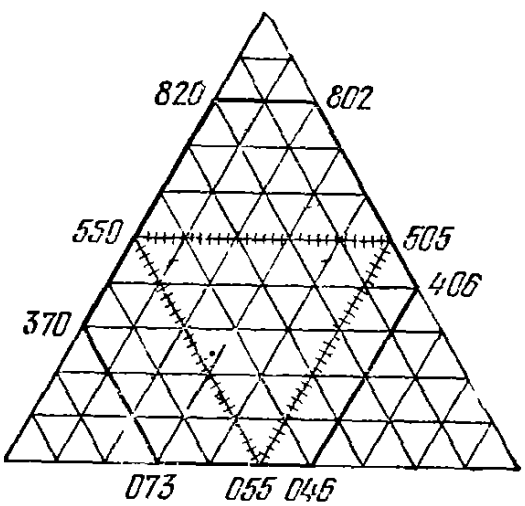


Рис. 86.

На рисунке 86 проиллюстрирована ситуации [10; 8, 7, 6], в которой требуется разлить 10 литров жидкости в сосуды, вмещающие 8, 7 и 6 литров, соответственно. Здесь мы легко можем отмерить 1, 2, 3 или 4 литра. Но мы никогда не сможем отмерить 5 литров (если не известно, что с самого начала в одном из сосудов содержится 5 литров), потому что путь, проходящий через точки 055, 505, 550, крутится подобно порочному кругу, и в него нельзя войти ни с какого

другого пути. Такие явления встречаются в любой ситуации $[h;\ a,\ b,\ c]$ при

$$h = 2d \geqslant a > b > c > d.$$

Несколько другой случай аномалий встречается в ситуации [10; 8, 6, 4] (рис. 87), где пути, проходящие через точку 550, образуют узор из маленьких равносторонних треугольников и правильных шестиугольников. Это подтверждает тот очевидный факт, что нечетное число литров нельзя измерить сосудами, все емкости которых четны. Такие затруднения могут встретиться в любой ситуации $[h;\ a,\ b,\ c]$, в которой числа $a,\ b,\ c$ имеют общий делитель, больший единицы.

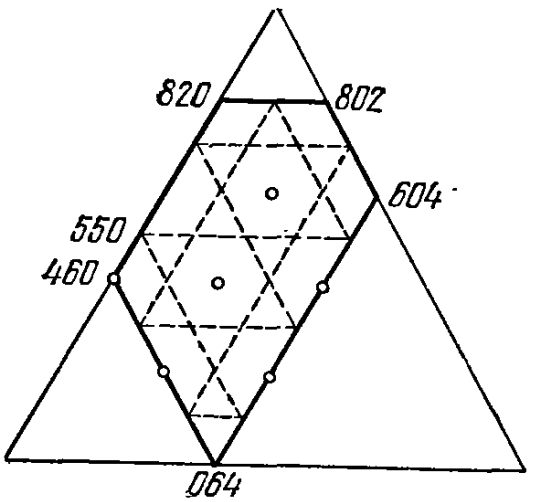


Рис. 87.

Наиболее известны ситуации $[h;\ a,\ b,\ c]$, в которых

$$h = a = 2d = b + c,$$

и поэтому сфера операций ограничена параллелограммом, вершинами которого являются $a00$, $cb0$, $0bc$, $b0c$. На рисунках 88 и 89 в ситуации [8; 8, 5, 3] показаны шестиэтапное и восьмиэтапное решения задачи, которая может быть выражена следующим образом: два человека имеют сосуд, наполненный 8 литрами какой-то жидкости, и два пустых сосуда; емкостью 5 литров и 3 литра. Они хотят разделить эти 8 литров жидкости поровну.

Первое, что нужно сделать, — это либо наполнить сосуд емкостью 5 литров, как на рисунке 88, либо сосуд емкостью 3 литра, как на рисунке 89. После этого, всякий раз, когда путь достигает одной из четырех прямых $y = 0$, $y = 5$, $z = 0$, $z = 3$, которые являются сторонами нашего параллелограмма (область операций), мы рассматриваем одну прямую как зеркало. Другими словами, мы следуем по траектории биллиардного шара, который ударили так, чтобы он двигался вдоль одного края стола, имеющего эту несколь-

ко необычную форму. (Правило последовательных отражений объясняется тем фактом, что каждый отрезок ломаной, параллельный стороне исходного треугольника, соответствует операции переливания

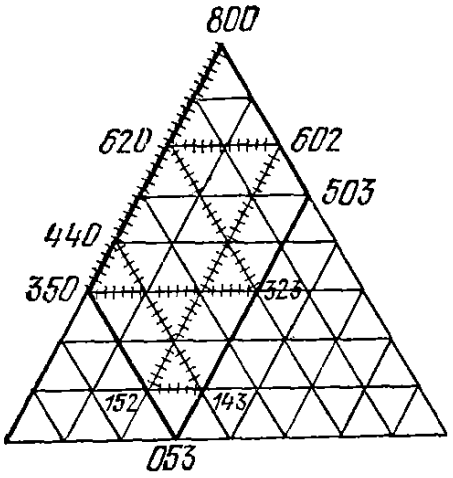


Рис. 88.

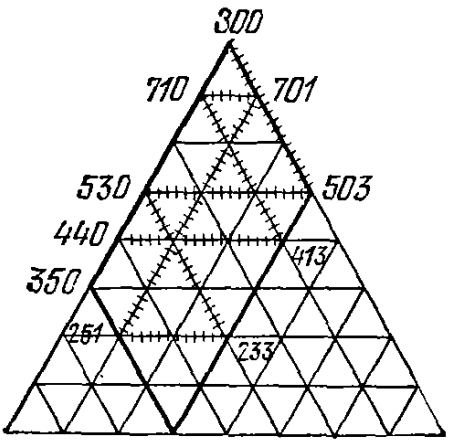


Рис. 89.

жидкости из одного сосуда в другой, а третий сосуд в это время не трогают). Таким образом, мы получаем семиэтапное решение

800, 350, 323, 620, 602, 152, 143, 440

и восьмиэтапное решение

800, 503, 530, 233, 251, 701, 710, 413, 440.

Ясно, что такую задачу (с $a = b + c$) можно решить только тогда, когда целые числа b и c — взаимно просты, т. е. не имеют общего делителя, большего единицы.

Упражнения

1. Нам даны сосуд емкостью 12 пинт, наполненный жидкостью, и два пустых сосуда емкостью 9 пинт и 5 пинт. Каким образом мы можем разделить жидкость на две равные порции?

2. Три грабителя украли у лавочника флакои с 24 унциями бальзама. Убегая, они встретили по дороге продавца стеклянной посуды, у которого купили три сосуда. Добравшись до надежного места, они захотели разделить добычу, но оказалось, что купленные сосуды вмещают 13, 11 и 5 унций соответственно. Как они могли бы разделить добычу на равные доли? ([5], стр. 28, 40).

3. Пусть две точки P и P' имеют трилинейные координаты (x, y, z) и (x', y', z') относительно треугольника ABC. Если эти

координаты удовлетворяют уравнениям

$$xx' = yy' = zz',$$

то эти две точки являются *изогонально сопряженными*, т. е.

$$\widehat{P'AC} = \widehat{BAP}, \quad \widehat{P'BA} = \widehat{CBP}, \quad \widehat{P'CB} = \widehat{ACP}.$$

§ 7. Дилатация

Преобразования, которые мы до сих пор рассматривали, объединяет то, что они переводят каждую фигуру в конгруэнтную ей фигуру. Всякое преобразование, которое обладает свойством *сохранять расстояния*, мы назовем *изометрией*.

Однако во многих случаях бывает полезным использование преобразования фигуры в подобную ей фигуру. Такое *подобие* сохраняет углы, но может изменять расстояния. При этом все расстояния увеличиваются (или уменьшаются) в одном и том же отношении, называемом *коэффициентом подобия*. Таким образом, любой отрезок AB переводится в отрезок $A'B'$, длина которого равна

$$|A'B'| = k|AB|.$$

Коэффициент k может быть как большим, так и равным или меньшим единицы. Подобие содержит, как частный случай, и изометрию, для которой $k = 1$.

Эти рассуждения можно сделать более строгими, если определить подобие как *преобразование, сохраняющее отношение расстояний*, откуда следует, что при этом сохраняются углы, а прямые переходят в прямые.

Простейшим случаем подобия является *дилатация*, которая *переводит каждую прямую в параллельную ей прямую*. Любая дилатация, не являющаяся параллельным переносом, называется *центральной дилатацией* или *гомотетией*, потому что все прямые, соединяющие соответствующие точки фигуры и ее образа, пересекаются в одной точке. Чтобы убедиться в справедливости этого, рассмотрите рисунки 90 и 91, на которых соответствующие отрезки AB и $A'B'$ (лежащие на параллельных прямых) удовлетворяют векторному соотношению

$$\overrightarrow{A'B'} = \pm \overrightarrow{AB}.$$

Для любой точки C, образующей вместе с точками A и B треугольник, ее образ C' является точкой пересечения прямой, проходящей через точку A' параллельно отрезку AC, с прямой, проходящей через точку B'

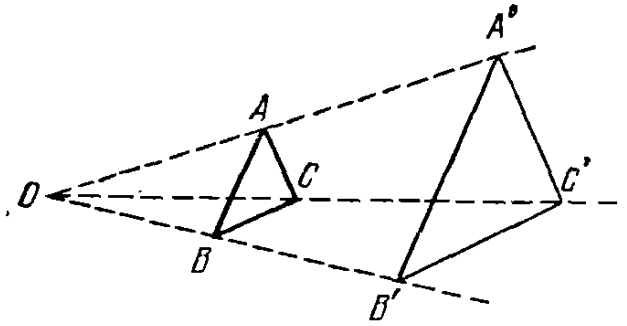


Рис. 90.

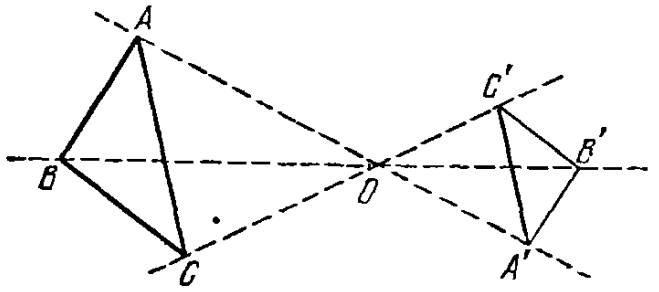


Рис. 91.

параллельно отрезку BC. Если эта дилатация не является параллельным переносом, то прямые AA' и BB' не параллельны, а пересекаются в точке O, обладающей тем свойством, что либо

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB},$$

как на рисунке 90, либо

$$\overrightarrow{OA'} = -k\overrightarrow{OA} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OB'} = -k\overrightarrow{OB},$$

как на рисунке 91. Вспоминая, что параллельные прямые делят пересекающие их прямые на пропорциональные отрезки, мы можем легко сделать вывод, что точка C' лежит на отрезке OC. Действительно,

$$\overrightarrow{OC'} = \pm k\overrightarrow{OC}.$$

Передвигая точку O все дальше и дальше влево на рисунке 90, мы видим, что *параллельный перенос* является предельным случаем гомотетии $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, когда коэффициент k стремится к единице. Еще проще изменить рисунок 91 таким образом, чтобы точка O стала серединой отрезка AA'. Отсюда следует, что частным случаем гомотетии $\overrightarrow{A'B'} = -k\overrightarrow{AB}$ является центральная симметрия или *разворот*

$$\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB};$$

при этом четырехугольник $ABA'B'$ является параллелограммом с центром в точке O.

Упражнения

1. Определите множество середин отрезков, у которых один конец находится в заданной точке, а другой — на заданной окружности.
2. Постройте квадрат, две смежные вершины которого лежат на стороне BC остроугольного треугольника ABC, а две другие вершины — на сторонах CA и AB соответственно.

§ 8. Спиральное подобие

Если сначала произвести дилатацию, а затем параллельный перенос, то любая прямая переходит в параллельную ей прямую; следовательно, результатом этого преобразования вновь является просто дилатация. И вообще, по тем же соображениям, сумма любых двух дилатаций (т. е. к результату первой применяется следующая дилатация) есть дилатация. С другой стороны, если вначале произвести дилатацию, а затем поворот, то тогда уже соответствующие прямые не параллельны. Таким образом, сумма дилатации и поворота (отличного от тождественного преобразования или разворота) не является дилатацией, хотя и остается *прямым подобием*, т. е. преобразованием, сохраняющим как величину углов, так и их знак.

Сумма гомотетии и поворота вокруг того же центра называется *спиральным подобием*. Это малоизвестное преобразование может быть прекрасно использовано для решения многих задач.

Если рассмотреть спиральное подобие с центром в точке O, как на рисунке 92, которое переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$, то треугольники OAB и $OA'B$ связаны прямым подобием и

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}.$$

Кроме того, как и в случае обычной дилатации, коэффициент подобия

$$k = \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}.$$

Так как любое спиральное подобие полностью определяется его центром O, коэффициентом k и углом поворота θ, то мы будем его обозначать символом

$$O(k, \theta).$$

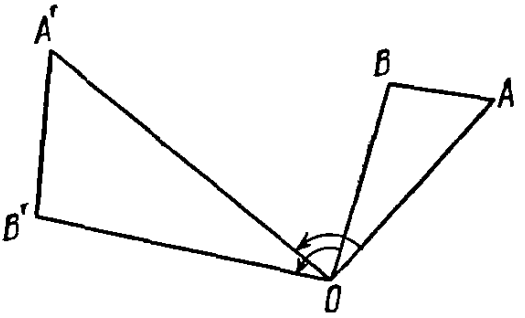


Рис. 92.

(Как обычно, поворот в направлении против движения часовой стрелки будем считать положительным, а в направлении по движению часовой стрелки — отрицательным.) В частности, $O(k, 0°)$ и $O(k, 180°)$ являются дилатациями, проиллюстрированными на рисунках 90 и 91 соответственно, а $O(1, \theta)$ является поворотом.

В качестве примера использования спирального подобия докажем следующую теорему:

Теорема 4.81. *Если на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC построены внешним образом квадраты с центрами в точках O_1, O_2, O_3, то отрезки O_1O_2 и CO_3 равны и перпендикулярны.*

В обозначениях рисунка 93 спиральное подобие $A(\sqrt{2}, 45°)$ преобразует треугольник CAO_3 в треугольник KAB, а спиральное подобие $C(\sqrt{2}, -45°)$ преобразует треугольник O_1CO_2 в треугольник BCK. Так как первое преобразование переводит отрезок O_3C в отрезок BK, а второе — отрезок O_1O_2 в тот же отрезок BK и так как коэффициент подобия один и тот же у обоих преобразований, то и стороны исходных треугольников должны были быть равными,

Кроме того, так как угол между образами отрезков O_3C и O_1O_2 (при подобиях, сопровождающихся поворотами на 45° и —45°) равен нулю, то эти отрезки и первоначально должны были быть перпендикулярными. Теперь доказательство закончено. (Заметим, что три отрезка AO_1, BO_2, CO_3, являясь высотами треугольника $O_1O_2O_3$, конкурентны.)

Определив спиральное подобие как сумму гомотетии и поворота с одним и тем же центром, естественно задаться вопросом: что же будет суммой гомотетии и поворота, если их центры различны. Простой и

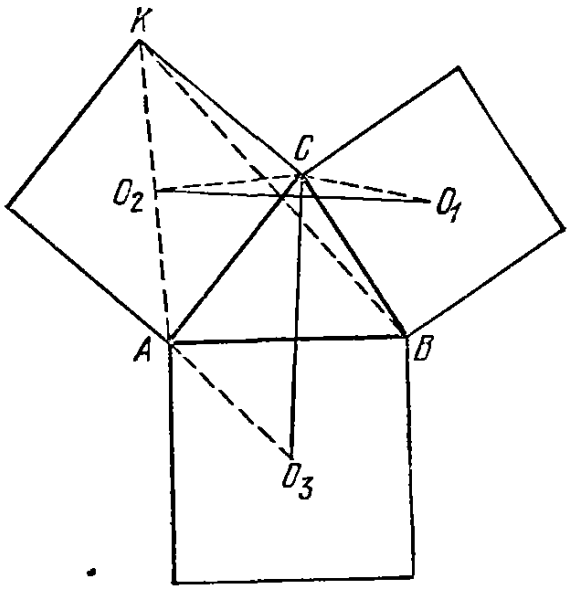


Рис. 93.

неожиданный ответ — спиральное подобие — является следствием того факта, что не существует более сложных случаев прямого подобия, а именно:

Теорема 4.82. *Любые две прямо подобные фигуры могут быть переведены одна в другую параллельным переносом или спиральным подобием.*

Для доказательства рассмотрим два соответствующих отрезка AB и $A'B'$ прямо подобных фигур. Если отрезок AB параллелен отрезку $A'B'$ и имеет ту же длину, то тогда это преобразование является параллельным переносом. Чтобы увидеть это, возьмем произвольную точку C, не лежащую на отрезке AB, и ее образ точку C'. Тогда из прямого подобия этих фигур мы можем вывести, что треугольники ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны, а их соответствующие стороны парал-

лельны. Из этого следует, что все отрезки, соединяющие точки с их образами, параллельны и равны, т. е. преобразование является параллельным переносом.

Далее предположим, что отрезки AB и $A'B'$ имеют разные длины (если четыре точки A, B, A', B' не образуют четырехугольник, то выберите новую пару соответствующих отрезков таких, чтобы они образовали четырехугольник, и назовите их AB и $A'B'$. Например, если точка B лежит на отрезке AA', как на рисунке 94, то возьмите вместо точки A середину отрезка AB, а вместо точки A' — середину отрезка $A'B'$). Тогда прямые AA' и BB' пересекаются в точке D, как на рисунке 95. Пусть окружности ABD и $A'B'D$, имеющие общую точку D, пересекаются еще раз в точке O (если же D — точка их касания, то буква O будет другим обозначением точки D). Сравнивая углы OAB, ODB, ODB' и $OA'B'$, мы видим, что $\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$. Аналогично $\widehat{OBA} = \widehat{OB'A'}$. Таким образом, треугольники OAB и $OA'B'$, являясь прямо подобными, связаны спиральным подобием $O(k, \theta)$, где

$$k = \frac{|OA'|}{|OA|} \quad \text{и} \quad \theta = \widehat{AOA'}.$$

Другими словами, каждое прямое подобие, которое не является параллельным переносом, имеет неподвижную точку. Кроме того, *неподвижная точка только одна*. Действительно, в противном случае, отрезок, соединяющий две такие точки, скажем, A и B, перешел бы сам в себя. А так как

$$k = \frac{|AB|}{|AB|} = 1,$$

то подобие было бы изометрией, оставляющей эти две точки неподвижными. И если при этом треугольник ABC' является образом некоторого треугольника ABC, то мы можем считать, что точка C' лежит на каждой из окружностей с центрами в точках A и B и радиусами AC и BC. Однако такой изометрией может быть лишь тождественное преобразование, являющееся параллельным переносом (на нулевое расстояние), и симметрия, которая не является прямым подобием (потому что она меняет знаки углов).

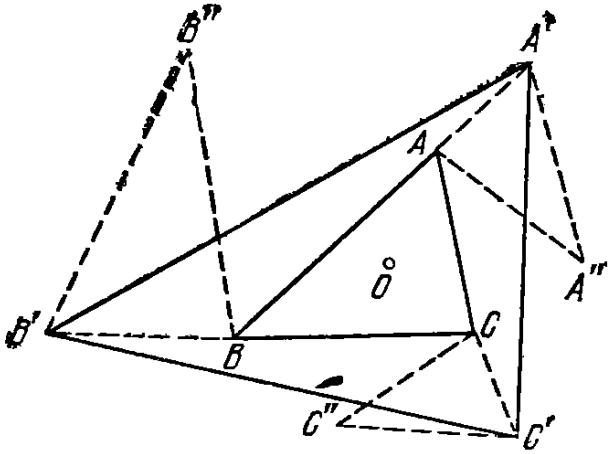


Рис. 94.

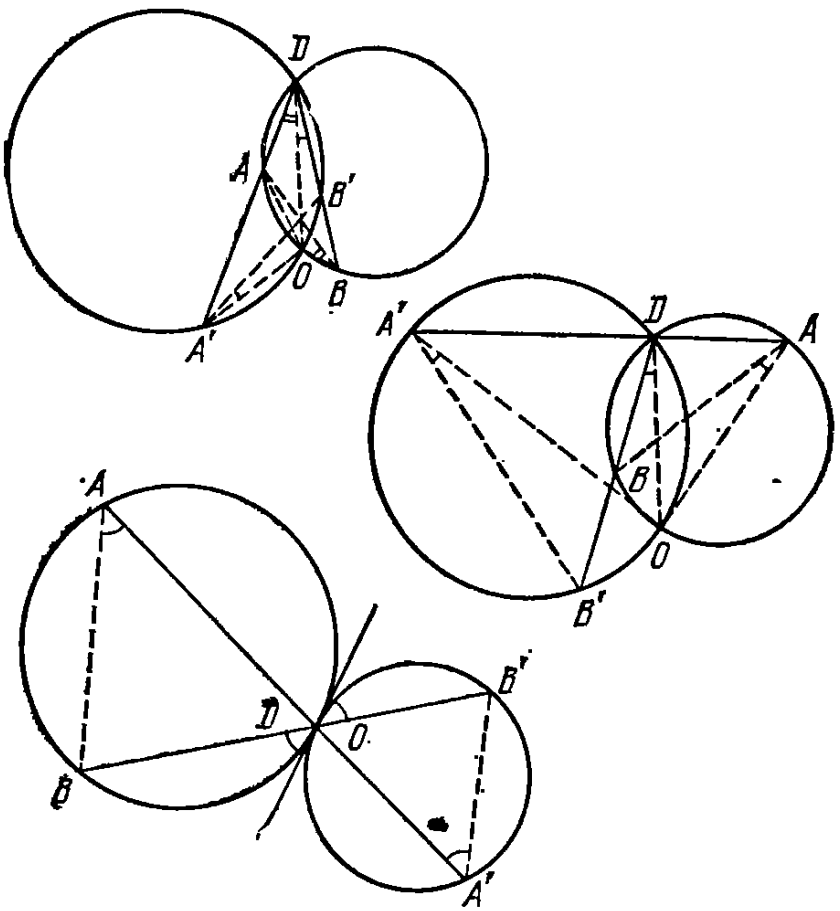


Рис. 95.

Рассмотрим следующий интересный факт: если нарисовать на кальке две карты некоторого государства в различных масштабах и совместить их*), то только в одном месте обе карты будут изображать один и тот же участок местности.

Идея спирального подобия легла в основу очень красивой теоремы, сформулированной Юлиусом Петерсеном (в 1880 году) и Р. Г. Шутом (в 1890 году)**), частным случаем которой является следующая

Теорема 4.83. *Если ABC и $A'B'C'$ — два прямо подобных треугольника и, кроме того, $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ — три прямо подобных треугольника, то треугольник $A''B''C''$ прямо подобен треугольнику ABC.*

Если треугольники ABC и $A'B'C'$ совмещаются при параллельном переносе, то утверждение очевидно, если нет, то пусть $O(k, \theta)$ — то единственное спиральное подобие, которое преобразует треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, так что

$$k = \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|} = \frac{|OC'|}{|OC|},$$

как на рисунке 94. Отсюда следует, что $\theta = \widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'}$. Но мы допускаем, что

$$\triangle AA'A'' \sim \triangle BB'B'' \sim \triangle CC'C''.$$

Следовательно,

$$\frac{|OA''|}{|OA|} = \frac{|OB''|}{|OB|} = \frac{|OC''|}{|OC|} = k',$$

$$\widehat{AOA''} = \widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = \theta',$$

и существует спиральное подобие $O(k', \theta')$, переводящее треугольник ABC в треугольник $A''B''C''$.

Другим частным случаем теоремы Петерсена — Шута, который доказывается таким же образом, является

---

*) Здесь слово «совместить» используется в том смысле, что меньшая карта целиком лежит в пределах большей. В этом случае легко показать, что центр спирального подобия действительно является точкой, лежащей внутри страны.

**) См. Ю. Петерсен [30], стр. 71 или Г. Г. Фордер [37], стр. 53.

Теорема 4.84. *Пусть задано подобие, переводящее каждую точку P отрезка AB в точку P' отрезка $A'B'$; тогда точки, лежащие на отрезках PP' и делящие их в заданном отношении, либо различны и коллинеарны, либо все совпадают.*

Упражнения

1. Если треугольник ABC преобразуется при помощи спирального подобия вокруг вершины A, при котором вершина B движется по отрезку BC, то вершина C будет двигаться прямолинейно.

2. Если треугольник ABC является разносторонним, то его внутренний треугольник Наполеона $N_1N_2N_3$ является обратно направленным по отношению к нему в том смысле, что его ориентация противоположна ориентации треугольников ABC и $O_1O_2O_3$ (это утверждалось без доказательства в § 3 гл. 3).

§ 9. Генеалогия преобразований

Существенной особенностью всех рассмотренных нами преобразований является тот факт, что они отображают взаимно однозначно всю плоскость на себя. Среди них мы рассмотрели только *непрерывные преобразования* (или «гомеоморфизмы»), т. е. преобразования, переводящие близкие точки в близкие точки *). Среди непрерывных преобразований (которые, в некотором смысле, являются предметом рассмотрения книги О. Оре [28]) мы обсудили *линейные преобразования*, которые сохраняют коллинеарность точек и, следовательно, переводят параллельные прямые в параллельные прямые. Среди линейных преобразований мы рассмотрели *подобия*, которые сохраняют отношения расстояний, но мы не касались их более причудливых видов, таких, как прокрустово растяжение (которое переводит окружность в эллипс той же площади). Частными случаями подобий, которые мы рассмотрели, являются *изометрия*, сохраняющая расстояния,

*) Точнее: если A — некоторая точка, а A' — ее образ при непрерывном преобразовании, то образ B' точки B будет лежать внутри произвольно малого круга с центром в точке A', как только точка B будет достаточно близка к точке A.

дилатация, переводящая каждую прямую в параллельную ей прямую, и *спиральное подобие*, которое (так же как и во многих случаях изометрии и дилатации) оставляет одну точку неподвижной и сохраняет знак поворота (по движению часовой стрелки или против ее движения). Эти категории частично перекрываются: среди изометрий мы рассмотрели симметрии, параллельные переносы (которые являются дилатациями согласно вышеприведенному определению) и повороты (которые являются спиральными подобиями с коэффициентом растяжения 1). Оставшимся видом дилатации является центральная дилатация или гомотетия (которая является спиральным подобием с нулевым вращением). И, наконец, разворот является как поворотом (на 180°), так и гомотетией. Все эти связи могут быть сведены воедино в генеалогическом дереве, где каждый «ребенок» является частным случаем своего «родителя»

Упражнения

В терминах декартовых координат прокрустово растяжение*) переводит каждую точку (x, y) в точку (x', y'), где $x' = kx$, $y' = k^{-1}y$. Запишите аналогичные выражения для:

*) В русской математической литературе это преобразование носит название «гиперболический поворот». — *Прим. перев.*

1) параллельного переноса, переводящего точку (0, 0) в точку $(a; b)$,
2) симметрии относительно оси Oy,
3) симметрии относительно прямой $x - y = 0$,
4) разворота вокруг начала координат — точки O,
5) гомотетии $O(k, 0°)$,
6) спирального подобия $O(k, 90°)$,
7) изометрии, которая еще не была упомянута,
8) подобия, которое еще не было упомянуто,
9) непрерывного преобразования, не являющегося линейным,
10) преобразования, не являющегося непрерывным.

Глава 5

ВВЕДЕНИЕ В ИНВЕРСИВНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Помещаем круглую клетку в заданную точку пустыни, входим в нее и запираем изнутри. Производим инверсию пространства по отношению к клетке. Теперь лев внутри клетки, а мы — снаружи.

Г. Петард *)

До сих пор мы рассматривали лишь взаимно однозначные преобразования всей евклидовой плоскости. В настоящей главе это ограничение будет в значительной степени ослаблено — мы позволим одной из точек, — точке O, — не иметь образа. Точнее, рассматриваемые преобразования будут состоять в том, что мы фиксируем окружность с центром в точке O и «выворачиваем» через нее плоскость. При этом происходит следующее: все окружности, проходящие через точку O, преобразуются в прямые, а остальные окружности — вновь в окружности (а более сложные фигуры претерпевают радикальные изменения формы). Использование такого преобразования часто упрощает решения многих задач, в которых фигурируют прямые и окружности.

§ 1. Разбиение

Рассмотрим теорему, которая настолько интересна, что была включена в 1965 году в число вопросов на известном американском конкурсе по решению задач «William Lowell Putnam Competition». Предлагаемое нами доказательство этой теоремы является квинтэссенцией представленных решений.

Теорема 5.11. *Если четыре точки A, B, C, D не все лежат на одной окружности или прямой, то*

*) «Другие математические способы охоты», см. American Mathematical Monthly, авг. — сент., 1938, стр. 446—447. [См. также «Физики продолжают шутить», М., «Мир», 1968, стр. 261; Математическое просвещение, вып. 4, М., Физматгиз, 1959, стр. 188, 196. — *Прим. перев.*]

существуют две непересекающиеся окружности, одна из которых проходит через точки A и C, а другая — через точки B и D.

Прежде всего отметим, что если p — серединный перпендикуляр отрезка AC, а q — серединный перпендикуляр отрезка BD, то они не могут совпасть. В том случае, когда прямые p и q пересекаются (как на рисунке 96), их общая точка O является центром двух концентрических окружностей, одна из которых проходит через точки A и C, а другая — через точки B и D. Если же прямые p и q параллельны (как на рисунке 97), то также параллельны и прямые AC и

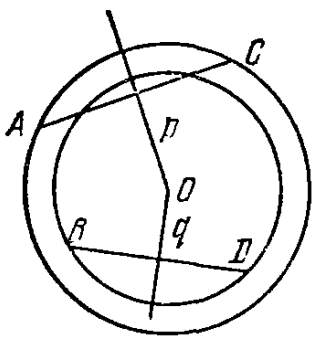


Рис. 96.

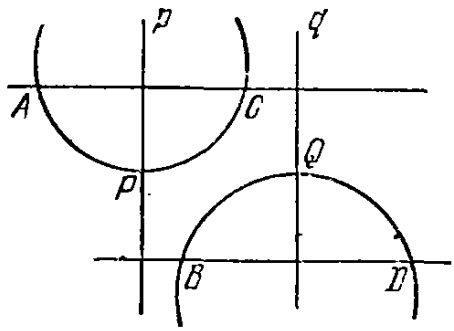


Рис. 97.

BD. Рассмотрим точки P и Q на прямых p и q (соответственно), лежащие строго посередине между параллельными прямыми AC и BD. Очевидно, что окружности APC и BQD не имеют общих точек.

Говорят, что две различные пары точек A, C и B, D *разбивают* друг друга, если все точки A, B, C, D лежат на одной окружности (или прямой), притом так, что на каждой из дуг AC (или отрезке AC) лежит ровно одна из двух оставшихся точек B и D. Это соотношение мы будем обозначать

$$AC//BD.$$

Заметим, что с тем же успехом мы сможем записать это соотношение еще семью другими способами, например, $AC//DB$ или $BD//AC$.

Если две пары точек A, C и B, D, лежащие на одной прямой или окружности, *не* разбивают друг друга, то легко построить две непересекающиеся окружности, одна из которых проходит через точки A и C,

а другая — через точки B и D. В том случае, когда точки коллинеарны (рис. 98), мы воспользуемся окружностями, построенными на отрезках AC и BD как на диаметрах. В случае же, когда точки лежат на одной окружности (рис. 99), мы можем принять в качестве их центров точки пересечения касательных в точках A и C, а также B и D.

Если, с другой стороны, $AC//BD$, то любая окружность, проходящая через точки A и C, но не проходящая через точку B, «разбивает» точки B и D в том смысле, что одна из этих точек лежит внутри этой окружности, а другая — вне ее. Поэтому данная окружность, проходящая через точки A и C, пересекает каждую окружность, проходящую через точки B и D.

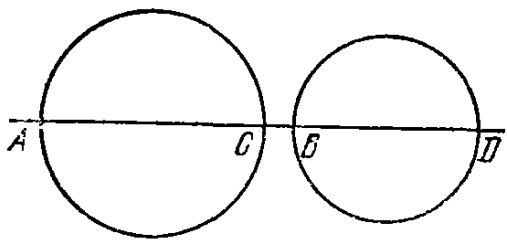


Рис. 98.

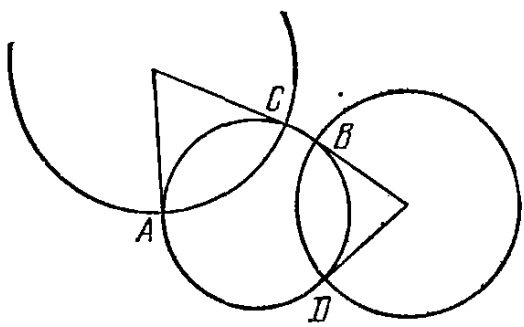


Рис. 99.

Теорема 5.11, записанная в форме противоположной обратной, утверждает, что если каждая окружность, проходящая через две заданные точки, имеет по крайней мере две общие точки с каждой окружностью, проходящей через две другие данные точки, то эти четыре точки должны лежать либо на одной прямой (рис. 100), либо на одной окружности (рис. 101). Очевидно, при этом указанные пары точек разбивают друг друга. Это замечание позволяет нам определить разбиение другим способом — симметричным и не использующим принадлежность этих четырех точек прямой или окружности.

Говорят, что *две различные пары точек A, C и B, D разбивают друг друга, если любая окружность, проходящая через точки A и C, пересекает любую окружность, проходящую через точки B и D (или совпадают с ней)*.

В действительности, существует и третий способ определения понятия разбиения вообще без упоминания окружностей:

Теорема 5.12. *Попарные расстояния между четырьмя различными точками A, B, C, D удовлетворяют соотношению*

$$|AB|\cdot|CD|+|BC|\cdot|AD|\geqslant|AC|\cdot|BD|,$$

причем равенство возможно только тогда, когда $AC//BD$.

Хотя для того, чтобы понять это доказательство, требуется внимательно следить за его ходом, оно довольно интересно. Рассмотрим случай, когда все четыре точки лежат на одной прямой и, следовательно,

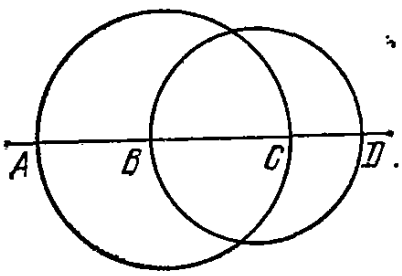


Рис. 100.

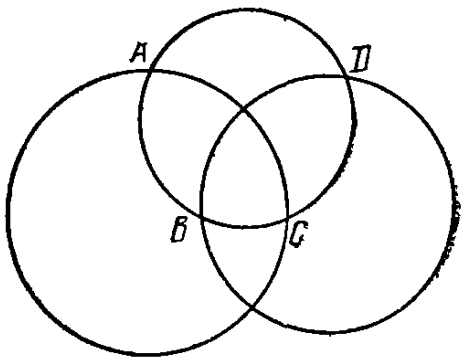


Рис. 101.

мы можем временно вновь использовать обозначения для направленных отрезков (положительных или отрицательных, как в § 1 гл. 2). Обозначим

$$AD=x,\quad BD=y,\quad CD=z,$$

тогда

$$AB=x-y,\quad BC=y-z,\quad AC=x-z,$$

и мы имеем

$$(5.12_1)\quad AB\times CD+BC\times AD=$$
$$=(x-y)z+(y-z)x=(x-z)y=AC\times BD.$$

Если $AC//BD$ (как на рисунке 101), то на отрезке AC лежит ровно одна из двух точек B или D, поэтому отношения AB/BC и AD/DC имеют противоположные знаки, так же и произведения $AB\times DC$ и $BC\times AD$ имеют противоположные знаки, а произведения $AB\times CD$ и $BC\times AD$ имеют одинаковые знаки. Следова-

тельно, соотношение (5.121) будет выполнено и в том случае, если выражения AB, CD и т. д. мы будем понимать как обычные положительные длины отрезков. Если же, с другой стороны, точки A и C не разбивают точек B и D (см. рис. 98), то эквивалентные утверждения меняются на обратные, например: $AB \times CD$ и $BC \times AD$ имеют противоположные знаки. Теперь, если использовать лишь положительные длины, то соотношение (5.121) означает, что положительное число $|AC| \cdot |BD|$ равно разности между двумя положительными числами $|AB| \cdot |CD|$ и $|BC| \cdot |AD|$. А так как их сумма больше их разности, из этого следует, что

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| > |AC| \cdot |BD|.$$

На этом заканчивается доказательство теоремы 5.12 для случая коллинеарных точек.

И, наконец, если эти четыре точки не лежат на одной прямой, то некоторые три из них должны образовывать треугольник, и мы можем переобозначить их (если необходимо) так, чтобы этот треугольник имел обозначение ABC, а оставшаяся точка (возможно, лежащая на одной из сторон этого треугольника) — D. Теперь мы видим, что теорема 5.12 есть следствие теоремы Птолемея (2.61) и ее обратной (2.62), которая утверждает, что попарные расстояния между четырьмя точками A, B, C, D (первые три из которых образуют треугольник) удовлетворяют соотношению

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geqslant |AC| \cdot |BD|$$

(знак равенства появляется только тогда, когда $ABCD$ — вписанный четырехугольник с диагоналями AC и BD).

Упражнение

1. Запишите все восемь соотношений, эквивалентных соотношению $AC \,//\, BD$.

§ 2. Сложное отношение

Для любых четырех различных точек A, B, C, D определено число $\{AB, CD\}$, называемое *сложным отношением* этих точек в указанном порядке; оно

определяется через их попарные расстояния с помощью следующей формулы:

$$\{AB, CD\} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|};$$

Разделив обе стороны неравенства в теореме 5.12 на $|AC| \cdot |BD|$ и использовав введенное обозначение, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 5.21. *Сложные отношения четырех точек A, B, C, D удовлетворяют соотношению*

$$\{AD, BC\} + \{AB, DC\} = 1$$

тогда и только тогда, когда $AC//BD$.

Этот критерий разбиения, записанный в терминах сложных отношений, позволяет нам поменять ролями рассматриваемые понятия: вместо определения разбиений через окружности, мы теперь сможем определить окружности через разбиения! Любые три различные точки A, B, C определяют единственную окружность (или прямую) ABC, состоящую из самих точек A, B, C и точек X, для которых выполняется одно из следующих соотношений:

$$BC//AX, \text{ или } CA//BX, \text{ или } AB//CX.$$

Упражнения

1. $\{AB, CD\} = \{BA, DC\} = \{CD, AB\} = \{DC, BA\}$.
2. Вычислите $\{AD, BC\} + \{AB, DC\}$ при условии, что:

а) точки B и D делят отрезок AC внутренним и внешним образом в одном и том же отношении, т. е. $|AB|/|BC| = |AD|/|CD|$;

б) точка D — центр равностороннего треугольника ABC;

в) $ABDC$ — квадрат;

г) $ABCD$ — квадрат.

§ 3. Инверсия

В 1831 году Л. Магнус предложил следующее «квазипреобразование». Пусть даны окружность ω с центром в точке O и радиусом k, как на рисунке 102, и точка P, отличная от точки O. *Образом точки P при инверсии относительно окружности* ω назовем точку

P', лежащую на луче OP, расстояние которой до точки O удовлетворяет соотношению

$$|OP| \cdot |OP'| = k^2.$$

Из этого определения следует, что образом точки P' является точка P, а следовательно, инверсия (так же как и известные нам разворот и симметрия) обладает тем свойством, что двукратное ее применение приводит к тождественному преобразованию. Кроме того, каждая точка, лежащая вне *окружности инверсии* ω, имеет своим образом точку, лежащую внутри ее: инверсия «выворачивает внутренность окружности ω наружу». *Единственными точками, которые переходят в себя при этом преобразовании, являются точки, лежащие на окружности* ω.

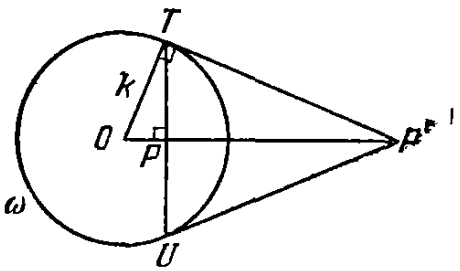


Рис. 102.

Рассмотрим, во что переходят при инверсии некоторые кривые. Окружность с центром в точке O и радиусом r, очевидно, переходит в концентричную ей окружность радиуса k^2/r. Любая прямая, проходящая через точку O, переходит в себя при условии, что мы не рассматриваем саму точку O (попытку избежать этой оговорки, принимая в качестве образа точки O саму точку O, следует признать неудачной, поскольку при этом нарушается непрерывность преобразования: при приближении точки P к точке O точка P' удаляется от нее).

. Пусть точка P лежит внутри окружности ω (не совпадая с точкой O). Рассмотрим хорду TU, проходящую через точку P перпендикулярно к отрезку OP, и точку P', в которой пересекаются касательные, проведенные к окружности в точках T и U. Так как треугольники OPT и OPT' подобны, то точка P', построенная таким образом, удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{|OP|}{|OT|} = \frac{|OT|}{|OP'|}, \quad |OP| \cdot |OP'| = k^2,$$

и, следовательно, является образом точки P.

И, наоборот, чтобы построить образ произвольной точки P', лежащей вне окружности ω, нужно

построить окружность на отрезке OP' как на диаметре, а точки ее пересечения T и U с окружностью ω соединить отрезком TU. Тогда его середина и будет искомой точкой P (являющейся точкой пересечения отрезков TU и OP).

Рисунок 103 показывает, что *образом любой прямой a, не проходящей через точку O, является окружность, проходящая через точку O (за исключением самой точки O)*, а ее диаметр, проходящий через точку O, перпендикулярен прямой a. Докажем это строго. Пусть точка A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую a, и пусть A' — образ

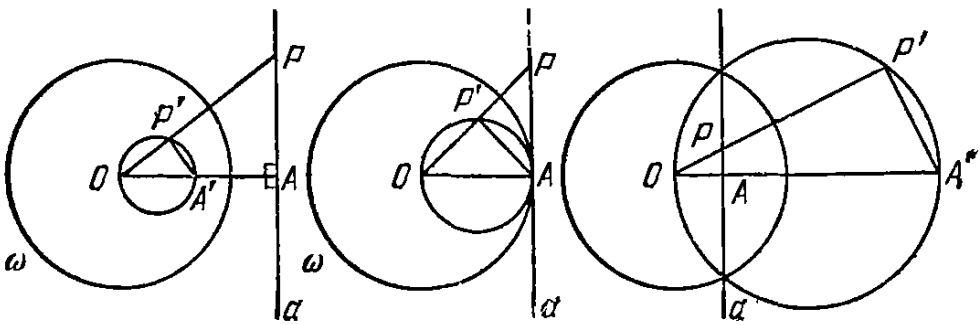


Рис. 103.

точки A. Возьмем произвольную точку P на прямой a и обозначим через P' точку пересечения луча OP с окружностью, построенной на отрезке OA' как на диаметре. Тогда из подобия треугольников OAP и $OP'A$ следует, что

$$\frac{|OP|}{|OA|} = \frac{|OA'|}{|OP'|}$$

и $|OP| \cdot |OP'| = |OA| \cdot |OA'| = k^2$.

И, наоборот, все точки P', лежащие на окружности с диаметром OA' (за исключением точки O), переходят в точки прямой a. Следовательно, *образом любой окружности, проходящей через точку O (с выколотой точкой O), является прямая, перпендикулярная ее диаметру, проходящему через точку O*, т. е. прямая, параллельная касательной к этой окружности в точке O.

Из этого следует, что пара пересекающихся окружностей, точками пересечения которых являются точки O и P, переходит в пару пересекающихся прямых,

проходящих через точку P' — образ точки P, а пара касающихся окружностей, имеющих точку O в качестве точки касания, переходит в пару параллельных прямых.

Существует инструмент не намного сложнее циркуля, с помощью которого мы рисуем окружности, позволяющий нарисовать образ при инверсии любой данной кривой. Это приспособление, открытое Л. Липкиным в 1781 году, было переоткрыто А. Поселье почти девяносто лет спустя и получило известность как *инверсор Поселье**). Оно состоит из шести шарнирно соединенных стержней, четыре из которых образуют ромб $PQP'R$ (длина стороны которого равна b), а два других (длины a, большей b) соединяют два противоположных угла Q и R этого ромба с фиксированной точкой O (см. рис. 104). Если вставить кончик карандаша в точку P', а в точку P — острие следящей иглы (или наоборот) и передвигать иглу вдоль заданной кривой, то карандаш будет вычерчивать образ этой кривой при инверсии. Действительно, если точка X — центр ромба, то

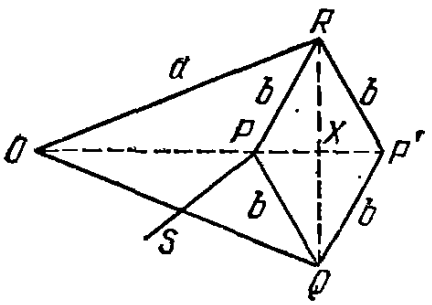


Рис. 104.

$$|OP|\cdot|OP'|=(|OX|-|PX|)(|OX|+|PX|)=$$
$$=|OX|^2-|PX|^2=|OX|^2+|RX|^2-|RX|^2-|PX|^2=$$
$$=|OR|^2-|PR|^2=a^2-b^2,$$

т. е. произведение $|OP|\cdot|OP'|$ является постоянным. Естественно, что конструкция прибора позволяет преобразовывать лишь кривые, лежащие внутри кольца, ограниченного окружностями с центром в точке O и радиусами $a\pm b$.

---

*) Другие конструкции и теорию рычажных механизмов см., например, A. B. Kempe, How to Draw a Straight Line, стр. 1—51 (в книге Hobson и др., Squaring a Circle, Chelsea, New York, 1953); для более глубокого изучения см. И. И. Артоболевский, Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых, Москва, Изд-во АН СССР, 1959 г. или E. H. Lockwood [24].

В частности, если седьмой стержень SP соединяет точку P с фиксированной точкой S, расстояние которой от точки O равно длине этого стержня, то точка P будет вынуждена двигаться по окружности, проходящей через точку O и, следовательно, точка P' будет описывать прямую или, точнее, отрезок. Таким образом, инверсор Поселье решает старую задачу — построение прямой без использования линейки (прямизна которой теоретически зависит от прямизны ранее построенной прямой).

Образом треугольника при инверсии обычно является довольно странная фигура, образованная дугами трех окружностей, проходящих через точку O. Однако, если ограничиться рассмотрением только вершин треугольника ABC, то можно получить интересный результат. Если вершины A, B, C переходят при инверсии в точки A', B', C', как на рисунке 105, и точка O лежит внутри треугольника ABC, то из равенств

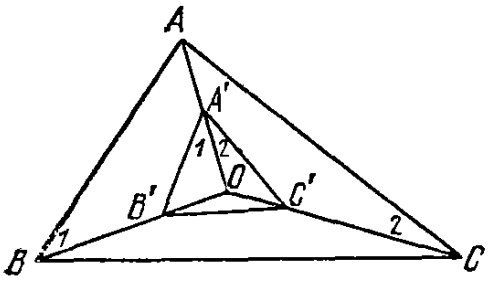


Рис. 105.

$$|OA| \cdot |OA'| = k^2 = |OB| \cdot |OB'|$$

следует, что треугольник $OA'B$ подобен треугольнику OBA и углы, помеченные цифрой 1, равны. То же самое справедливо для углов, помеченных цифрой 2. Следовательно, угол BOC равен сумме углов при вершинах A и A' в треугольниках ABC и $A'B'C'$. А так как

$$\widehat{BOC} = \hat{1} + \widehat{A'B'O} + \hat{2} + \widehat{A'C'O}$$

и

$$\widehat{A'B'O} = \widehat{BAO}, \quad \widehat{A'C'O} = \widehat{CAO},$$

то мы имеем

$$\widehat{BOC} = \hat{1} + \hat{2} + \widehat{BAO} + \widehat{CAO} = \widehat{B'A'C'} + \widehat{BAC}.$$

Аналогично

$$\widehat{COA} = \hat{B} + \hat{B'}.$$

Отсюда следует, что для данного треугольника ABC можно легко подобрать такое положение точки O, чтобы получился треугольник $A'B'C'$ с любыми наперед заданными углами при вершинах A' и B'. Найдя такое положение точки O, мы можем изменить k и, таким образом, изменить размер треугольника $A'B'C'$ (см. упражнение 6). Можно легко подобрать указанное положение точки O и в том случае, если она находится вне треугольника ABC, более того, даже если точки A, B, C коллинеарны. Следовательно, справедлива

Теорема 5.31. *Для любого данного треугольника и любых точек A, B, C можно подобрать окружность инверсии так, чтобы образы A', B', C' этих точек стали вершинами треугольника, конгруэнтного данному.*

Упражнения

1. Постройте образ квадрата, описанного вокруг окружности инверсии.

2. Найдите положения точки O, для которых стороны данного треугольника переходят в три конгруэнтные окружности.

3. Дана окружность ω с центром в точке O и некоторая точка P, отличная от точки O. Постройте образ точки P, используя только циркуль (без линейки) *):

а) при $OP > k/2$;

б) при $\frac{k}{2n} < OP \leqslant \frac{k}{2(n-1)}$ ([4], стр. 144).

4. Как связаны треугольники ABC и $A'B'C'$, если точка O является для треугольника:

а) центром описанной окружности;

б) ортоцентром;

в) центром вписанной окружности?

5. Найдите координаты образа точки (x, y) при инверсии относительно окружности

$$x^2 + y^2 = k^2.$$

6. Даны треугольники ABC и DEF. Опишите в общих чертах процесс нахождения центра O и радиуса k окружности инверсии, обладающей тем свойством, что образы точек A, B, C являются вершинами треугольника $A'B'C'$, конгруэнтного треугольнику DEF.

---

*) Используя инверсию, можно показать, что все построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки, могут быть выполнены с помощью только одного циркуля; см. [21], стр. 176—188 или H. P. Hudson, Ruler and Compasses, стр. 131—143 (статья, содержащаяся в упомянутой выше книге «Squaring a Circle»).

§ 4. Круговая плоскость

В предыдущем параграфе мы видели, что любая окружность, проходящая через точку O (с выколотой точкой O) переходит при инверсии в прямую и что любая окружность с центром O переходит при инверсии в окружность. Естественно задать вопрос: что случится с иначе расположенной окружностью. Сначала рассмотрим, как изменяется расстояние между двумя точками при инверсии.

Теорема 5.41. *Если при инверсии относительно окружности с центром в точке O и радиусом k пара точек A, B переходит в пару точек A', B', то расстояния между ними удовлетворяют равенству:*

$$|A'B'| = \frac{k^2 \cdot |AB|}{|OA| \cdot |OB|}.$$

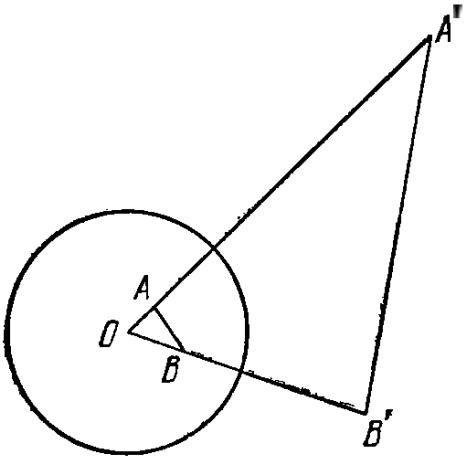


Рис. 106.

Действительно, так как треугольники OAB и $OB'A$ подобны (рис. 106), то

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|OB|} = \frac{|OA| \cdot |OA'|}{|OA| \cdot |OB|} = \frac{k^2}{|OA| \cdot |OB|}.$$

Отсюда легко следует сохранение величины сложного отношения *).

Теорема 5.42. *Если точки A, B, C, D переходят при инверсии в точки A', B', C', D', то*

$$\{A'B', C'D'\} = \{AB, CD\}.$$

Действительно,

$$\{A'B', C'D'\} = \frac{|A'C'| \cdot |B'D'|}{|A'D'| \cdot |B'C'|} = \frac{\dfrac{k^2|AC|}{|OA| \cdot |OC|} \cdot \dfrac{k^2|BD|}{|OB| \cdot |OD|}}{\dfrac{k^2|AD|}{|OA| \cdot |OD|} \cdot \dfrac{k^2|BC|}{|OB| \cdot |OC|}} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|} = \{AB, CD\}.$$

*) J. Casey, A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid (6th ed.), Hodges Figgis, Dublin, 1892, стр. 100.

В свою очередь, отсюда следует сохранение разбиения:

Теорема 5.43. *Если при инверсии точки A, B, C, D переходят в точки A', B', C', D' и $AC//BD$, то $A'C'//B'D'$.*

На самом деле, используя теоремы 5.21 и 5.42, мы получаем, что отношение $AC//BD$ означает, что

$$\{A'D', B'C'\} + \{A'B', D'C'\} = \{AD, BC\} + \{AB, DC\} = 1,$$

откуда $A'C'//B'D'$.

В конце § 2 мы установили, что любая окружность полностью определяется тремя своими точками как множество, состоящее из этих точек A, B, C и всех точек X, удовлетворяющих либо $BC//AX$, либо $CA//BX$, либо $AB//CX$. Следовательно, образ данной окружности при инверсии состоит из точек A', B', C' и всех точек X', удовлетворяющих либо $C'A'//B'X'$, либо $A'B'//C'X'$, либо $B'C'//A'X'$, т. е. ее образом является окружность (или прямая) $A'B'C'$. Как мы установили в § 3, окружность переходит при инверсии в прямую тогда и только тогда, когда она проходит через точку O. Тем самым доказана

Теорема 5.44. *Образом при инверсии любой окружности, не проходящей через точку O, является окружность, не проходящая через точку O.*

Описание окружности (или прямой) через разбиения наводит на мысль, что может оказаться полезным следующее изменение нашей терминологии: пусть понятие *окружность* включает как частный случай и *прямые*, т. е. мы будем рассматривать прямую как окружность бесконечного радиуса. Одновременно договоримся присоединить к евклидовой плоскости единственную *бесконечно удаленную* точку P_∞ и считать ее образом центра для любой окружности инверсии. Так пополненная плоскость называется *круговой плоскостью*. Так как при инверсии с центром в точке O любая окружность, проходящая через точку O, переходит в прямую, то мы будем рассматривать прямую как окружность, проходящую через точку P_∞. Далее, поскольку две окружности, касающиеся друг друга в точке O, переходят при инверсии в параллельные прямые, то мы будем рассматривать параллельные прямые как окружности, касающиеся в точке P_∞. При

этом соглашении из теоремы 5.44 в сочетании с результатами § 3 получается для круговой плоскости

Теорема 5.45. *При инверсии образом любой окружности является окружность.*

Присоединение точки P_∞ к евклидовой плоскости позволяет нам объявить инверсию взаимно однозначным преобразованием всей круговой плоскости: каждая точка (без исключения) имеет образ, и каждая точка является образом некоторой точки.

Любые две окружности могут быть отнесены к одному из трех типов: *пересекающиеся*, *касающиеся* и *непересекающиеся*, которые характеризуются количеством общих точек (2, 1 и 0). Поэтому пара окружностей при инверсии переходит в пару окружностей, принадлежащих к тому же типу (при этом к «касающимся окружностям» причисляются как окружность с касательной к ней прямой, так и две параллельные прямые).

Упражнения

1. Пусть A — любая точка вне окружности ω, A' — ее образ при инверсии и P — точка, движущаяся по окружности ω. Тогда для любого положения точки P отношение $|PA|/|PA'|$ постоянно. Обратно, если точки B и C делят данный отрезок AA' внешним и внутренним образом в одном и том же заданном отношении (отличном от единицы, как в упражнении 3а § 3), то окружность, построенная на отрезке BC, как на диаметре, является множеством точек, отношение расстояний которых от точек A и A' постоянно. (Это множество называется *окружностью Аполлония*.)

2. Пусть через произвольную точку на окружности ω проведены прямые, проходящие через концы некоторого диаметра этой окружности. Обозначим через P и P' точки пересечения этих прямых с другим диаметром, перпендикулярным первому Тогда точка P' является образом точки P.

3. Через любые две точки, лежащие внутри данной окружности, можно провести только две окружности, касательные к данной.

4. Для любых трех различных точек можно построить три попарно касающиеся окружности, для которых данные точки являются центрами. Если a, b, c — попарные расстояния между этими точками, то радиусы этих окружностей, как легко видеть, равны $s-a$, $s-b$, $s-c$, где $s=(a+b+c)/2$. (Эти точки не обязательно должны образовывать треугольник. Они могут быть и коллинеарными.) При этом существуют ровно две окружности, касающиеся всех этих трех окружностей. Эти две окружности не пересекаются. (Они называются *окружностями Содди* ([17], стр. 29—32)).

5. Дайте короткое доказательство теоремы 5.12, используя инверсию ([31], стр. 10—11).

6. При инверсии относительно окружности ω с центром в точке O окружность α, проходящая через точку O, переходит в прямую являющуюся радикальной осью (см. § 2 гл. 2) окружностей ω и α.

7. Если рассматривать прямую как частный случай окружности, то чему соответствует пара пересекающихся прямых? Паре касающихся или паре пересекающихся окружностей? Объясните ваш ответ в терминах количества общих точек у двух прямых.

§ 5. Ортогональность

Итак, мы обнаружили, что при инверсии окружности сохраняются (вновь переходят в окружности). Теперь нам остается сделать лишь один шаг, чтобы увидеть, что при этом сохраняются также и углы. Угол между двумя пересекающимися окружностями естественно определить как угол между касательными к ним в точке пересечения. Из симметрии относительно линии центров ясно, что углы имеют одну и ту же величину в обеих точках пересечения. Посмотрим, как на величину углов влияет инверсия относительно окружности с центром в точке O. Пусть θ — один из углов между двумя прямыми a и b, проходящими через точку P, как на рисунке 107. При обсуждении рисунка 103 мы заметили, что прямая a при инверсии переходит в окружность α, проходящую через точку O, касательная к которой в точке O параллельна прямой a. Аналогично, прямая b переходит при инверсии в окружность β, проходящую через точку O, касательная к которой в точке O параллельна прямой b. Так как угол θ является углом между их касательными в точке O, то он является углом пересечения и самих окружностей α и β. Однако эти окружности пересекаются не только в точке O, но и в точке P' — образе точки P. Следовательно, окружности образуют тот же самый угол θ и в точке P'.

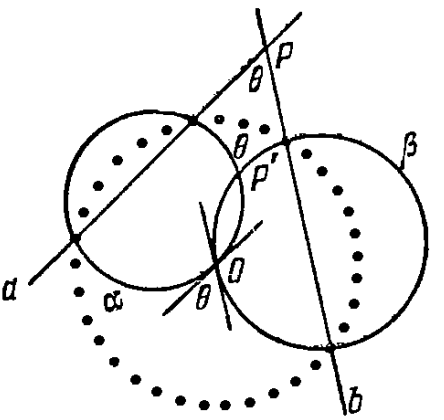


Рис. 107.

Читатель может легко сообразить, какие необходимы изменения в том случае, если прямая a (или b)

проходит через точку O. (Если обе прямые проходят через точку O, то они переходят при инверсии в самих себя, и неизменность угла становится очевидной.)

Пусть некоторые две окружности проходят через точку P. Мы можем считать, что прямые a и b являются их касательными в точке P. Образы этих окружностей при инверсии касаются окружностей α и β (соответственно) в точке P'. Следовательно, справедлива

Теорема 5.51. *Если две окружности пересекаются под углом* θ, *то образы этих окружностей при инверсии пересекаются под тем же углом* θ.

Две окружности называются *ортогональными*, если они пересекаются (дважды) под прямым углом, при этом в каждой из точек пересечения касательная к одной из них является диаметром другой. Частным случаем теоремы 5.51 является

Теорема 5.52. *Ортогональные окружности переходят при инверсии в ортогональные окружности.*

Рассмотрим вновь рисунок 24 и заменим на нем обозначение точки P на O. Изображенную там окружность мы можем рассматривать в качестве произвольной окружности, проходящей через точки A и A' (каждая из которых, как и следует из обозначения, является образом другой при инверсии с центром в точке O). Тогда, так как

$$k^2 = |OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = |OT|^2,$$

то любая другая секущая BB', проходящая через точку O, порождает новую пару точек B и B', переходящих друг в друга при этой инверсии. А если рассмотреть касательную, проведенную из точки O к этой окружности, то точка касания T будет точкой, переходящей в себя при этой инверсии, т. е. точкой, лежащей на окружности инверсии ω. Следовательно, имеет место.

Теорема 5.53. *Любая окружность, проходящая через две различные точки, каждая из которых является образом другой при инверсии относительно окружности* ω, *переходит в себя при этой инверсии и ортогональна к окружности* ω.

Обратно, *каждая окружность, ортогональная к окружности* ω, *переходит в себя при инверсии относи-*

тельно этой окружности. Действительно, если она пересекает окружность ω в точке T и A — любая ее другая точка, то прямая OA пересекает ее также в точке A', обладающей тем свойством, что

$$|OA| \cdot |OA'| = |OT|^2 = k^2.$$

Кроме того, *если две окружности, ортогональные к окружности* ω, *пересекаются, то их общие точки переходят друг в друга при этой инверсии.* На самом деле, если точка A — одна из этих точек, то прямая OA пересекает каждую из окружностей в точке, являющейся образом точки A.

Эти замечания позволяют нам дать определение инверсии, используя понятие ортогональности, так что в результате получим «инверсивное» определение инверсии:

Любая точка на окружности ω *является своим образом при инверсии относительно этой окружности; образом любой другой точки* P *при этой инверсии является вторая точка пересечения любых двух окружностей, проходящих через точку* P *и ортогональных к окружности* ω.

Если вместо окружности ω мы возьмем прямую, то согласно приведенному определению инверсия превращается в симметрию относительно этой прямой и, следовательно, симметрию можно считать частным случаем инверсии.

Из того же определения инверсии следует, что для любой окружности α и двух точек, переходящих друг в друга при инверсии относительно этой окружности, их образами при инверсии относительно окружности ω будут окружность α' и две точки, переходящие друг в друга при инверсии относительно окружности α'. Теперь, соединив идеи инверсивной геометрии и евклидовой, мы можем установить влияние инверсии на положение центра A окружности α. Мы могли бы предположить, что при инверсии точка A переходит в центр окружности α', но это было бы слишком просто! (Этого не происходит даже в том случае, когда окружность α совпадает с окружностью ω.) В действительности, при инверсии относительно окружности ω окружность α переходит в окружность α', а две точки A и P_∞, переходящие друг в друга при инверсии

относительно окружности α, преобразуются в две точки A' и O, переходящие друг в друга при инверсии относительно окружности α'. Таким образом, точка A' (являясь образом точки A при инверсии относительно

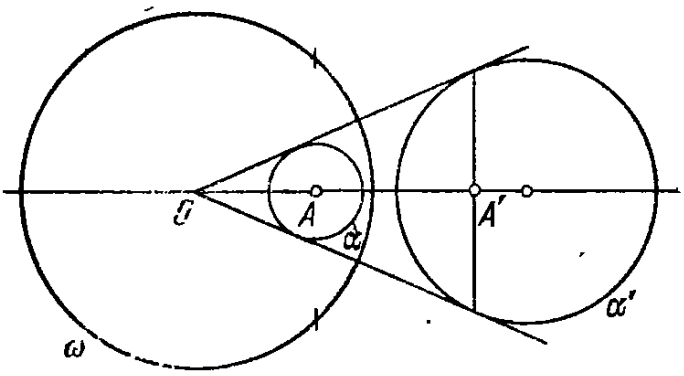


Рис. 108.

окружности ω) не будет центром окружности α', а будет образом точки O (при инверсии относительно окружности α', рис. 108).

Упражнения

1. Дана окружность ω и точка A вне нее. Постройте окружность с центром в точке A, ортогональную окружности ω.

2. Дана окружность ω и две точки P и Q, не переходящие друг в друга при инверсии относительно этой окружности. Постройте окружность, проходящую через точки P и Q, ортогонально к окружности ω.

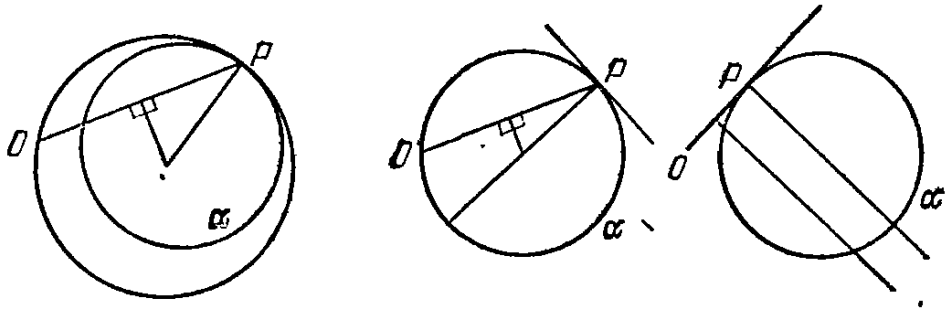


Рис. 109.

3. Дана точка P и две окружности ω_1 и ω_2, не проходящие через точку P. Постройте окружность, проходящую через точку P и ортогональную к обеим окружностям ω_1 и ω_2.

4. Пусть при инверсии относительно окружности α (радиуса k и с центром в точке O) окружность α переходит в окружность α'. Найдите, как связаны между собой степени точки O относительно окружностей α и α'.

5. Для любой окружности α, точки P, лежащей на ней, и точки O, не лежащей на ней, существует единственная окружность, проходящая через точку O и касающаяся окружности α в точке P (рис. 109).

§ 6. Теорема Фейербаха

В § 8 гл. 1 мы кратко упомянули теорему Фейербаха, доказательство которой может быть проведено с помощью инверсии по крайней мере тремя способами. Один из них изложен в книге Д. Пидо ([31], стр. 9—10). Прежде чем изложить другой способ *), вновь сформулируем теорему Фейербаха, а именно:

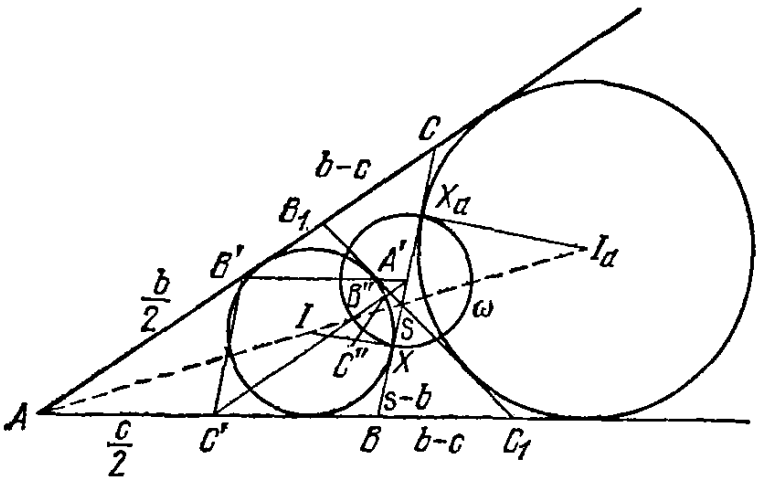


Рис. 110.

Теорема 5.61. *Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и всех трех вневписанных окружностей этого треугольника.*

На рисунке 110 изображены треугольник ABC, его серединный треугольник $A'B'C'$, окружность, вписанная в треугольник ABC (с центром в точке I), касающаяся стороны BC в точке X, одна из вневписанных окружностей (с центром в точке I_a), касающаяся стороны BC в точке X_a, и общая касательная B_1C_1 к этим двум окружностям (которые одновременно касаются всех трех сторон треугольника ABC). На этом рисунке также изображены окружность ω, построенная на отрезке XX_a как на диаметре, и точки S, B'', C'', в которых отрезок B_1C_1 пересекает отрезки BC, $A'B'$,

*) См. [29], стр. 76—77.

$A'C'$. Так как окружность ω ортогональна к вписанной и к вневписанной окружностям, то при инверсии относительно окружности ω обе эти окружности переходят в себя. Теперь мы переходим к доказательству того, что инверсия относительно окружности ω переводит окружность девяти точек $A'B'C'$ в прямую B_1C_1.

Из теоремы 1.41 и последующих замечаний мы имеем

$$|BX| = |X_aC| = s - b$$

(где $s = (a + b + c)/2$), откуда следует, что центром окружности ω является точка A' — середина отрезка BC, а длина диаметра окружности ω равна

$$|XX_a| = a - 2(s - b) = b - c$$

(эту величину мы предполагаем положительной; в противном случае проведем те же построения по отношению к другой стороне, соответственно переименовав вершины A, B, C). Окружность девяти точек проходит через точку A — центр окружности ω; следовательно, при инверсии относительно окружности ω она переходит в прямую. Показав, что точки B'' и C'' являются образами при инверсии относительно окружности ω точек B' и C', лежащих на окружности девяти точек, мы получим, что эта прямая проходит через точки B'' и C'' (а поэтому и через точки B_1 и C_1).

Так как точка S (так же как и точки I и I_a) лежит на биссектрисе угла A, а по теореме 1.33 точка S делит отрезок CB (длины a) в отношении $b : c$, то мы имеем

$$|CS| = \frac{ab}{b + c}, \quad |SB| = \frac{ac}{b + c}$$

и полуразность этих двух длин равна

$$|SA'| = \frac{a(b - c)}{2(b + c)}.$$

Также $|BC_1| = |AC_1| - |AB| = |AC| - |AB| = b - c$ и, аналогично, $|CB_1| = b - c$.

Так как треугольник $SA'B''$ подобен треугольнику SBC_1 и треугольник $SA'C''$ подобен треугольнику SCB_1, то мы имеем

$$\frac{|A'B''|}{b-c}=\frac{|A'B''|}{|BC_1|}=\frac{|SA'|}{|SB|}=\frac{b-c}{2c}$$

и

$$\frac{|A'C''|}{b-c}=\frac{|A'C''|}{|CB_1|}=\frac{|SA'|}{|SC|}=\frac{b-c}{2b},$$

$$|A'B'|\cdot|A'B''|=\frac{c}{2}\frac{(b-c)^2}{2c}=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

и

$$|A'C'|\cdot|A'C''|=\frac{b}{2}\frac{(b-c)^2}{2b}=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Таким образом, при инверсии относительно окружности ω, радиус которой равен $(b-c)/2$, точка B' переходит в точку B'', а точка C' — в точку C'', что и требовалось.

Более того, инверсия относительно окружности ω переводит вписанную окружность и рассмотренную вневписанную окружность в самих себя, а их общую касательную B_1C_1 в окружность девяти точек. Следовательно, окружность девяти точек, как и прямая B_1C_1, касается этих двух окружностей и, аналогично, касается двух оставшихся вневписанных окружностей.

В связи с этим, окружность девяти точек может быть определена с помощью точек D, E, F, которые являются точками пересечения пар противоположных сторон ортоцентрического четырехугольника $ABCH$ (см. конец § 4 гл. 2). Другими словами, все четыре треугольника ABC, BCH, CAH, ABH имеют одну и ту же окружность девяти точек. Однако каждый из этих треугольников имеет свое собственное множество четырех окружностей (вписанную и три вневписанные). Таким образом, ортоцентрический четырехугольник определяет множество из шестнадцати окружностей, касающихся окружности DEF.

Упражнения

1. Угол пересечения прямых B_1C_1 и BC (см. рис. 110) равен $B-C$.

2. При инверсии относительно окружности ω точка S переходит в точку D (основание высоты, опущенной из вершины A на прямую BC).

§ 7. Соосные окружности

В § 3 гл. 2 мы установили, что любые две неконцентрические окружности α и β определяют «пучок» $\alpha\beta$ *соосных окружностей*, обладающих тем свойством, что радикальная ось окружностей α и β является радикальной осью и для любой пары окружностей, принадлежащих этому семейству. При этом любая точка P на радикальной оси имеет одну и ту же степень относительно всех окружностей этого пучка. В тех случаях, когда она положительна, квадратный корень из нее равен длине касательной от точки P до любой из этих окружностей. Этот отрезок может рассматриваться как радиус окружности с центром в точке P, ортогональной ко всем этим окружностям. Любые две из таких окружностей, назовем их γ и δ (ортогональные ко всем окружностям пучка $\alpha\beta$) принадлежат пучку $\gamma\delta$, двойственному к первоначальному, такому, что каждая окружность одного пучка ортогональна к любой окружности из другого пучка. Каждый пучок содержит в качестве одного из своих элементов прямую, являющуюся, с одной стороны, радикальной осью окружностей этого пучка, а с другой стороны, — линией центров окружностей второго пучка. Разумеется, эти две прямые перпендикулярны. Если использовать эти прямые в качестве координатных осей, как в § 3 гл. 2, то эти окружности могут быть заданы уравнениями

$$x^2+y^2-2ax+c=0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2-2by-c=0,$$

где число c фиксировано, а числа a и b могут изменяться. Если $c>0$, то первый пучок состоит из *непересекающихся* окружностей, как на рисунке 30, а второй — из *пересекающихся* окружностей, проходящих через *граничные точки* $(\pm\sqrt{c},\ 0)$, которые могут рассматриваться как вырожденные элементы

$$(x-\sqrt{c})^2+y^2=0 \quad \text{и} \quad (x+\sqrt{c})^2+y^2=0$$

первого пучка. Если же $c<0$, то мы получим то же самое расположение окружностей, лишь повернутое на прямой угол вокруг начала координат; при этом первый пучок будет состоять из пересекающихся, а второй из непересекающихся окружностей. Наконец,

если $c = 0$, то мы получим два ортогональных пучка *касающихся* окружностей, причем все они будут касаться своих осей в начале координат.

Элементы пучка непересекающихся соосных окружностей располагаются в естественном порядке, определяемым порядком точек, в которых они пересекают отрезок, соединяющий граничные точки. Этот порядок позволяет нам точно указать, какой из трех элементов лежит «между» двумя другими.

Мы можем описать пучок $\alpha\beta$ как состоящий из всех окружностей, ортогональных к окружностям γ и δ, и пучок $\gamma\delta$, как состоящий из всех окружностей,

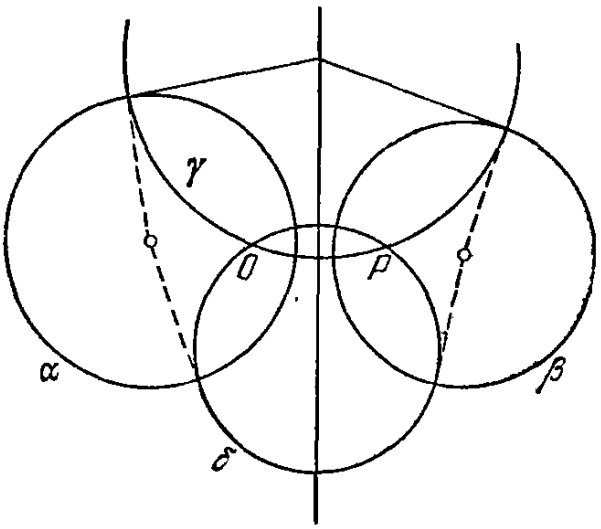


Рис. 111.

ортогональных к окружностям α и β. Другими словами, пучок $\alpha\beta$ состоит из всех окружностей, ортогональных любым двум различным окружностям, которые ортогональны к окружностям α и β.

Если точки O и P — общие точки двух пересекающихся окружностей γ и δ, то инверсия относительно любой окружности с центром в точке O переводит эти окружности в прямые, проходящие через точку P' — образ точки P. При этом окружности, ортогональные к этим прямым, образуют «пучок» концентрических окружностей с центром в точке P', а пучок $\gamma\delta$ переходит в совокупность диаметров этих концентрических окружностей. Такая же картина может быть получена из любых двух непересекающихся окружностей α и β. Действительно, мы можем легко найти (рис. 111) две

пересекающиеся окружности γ и δ, ортогональные одновременно к окружностям α и β, а именно, две окружности соответствующих радиусов, центры которых лежат на радикальной оси окружностей α и β. Следовательно, справедлива

Теорема 5.71. *Любые две непересекающиеся окружности могут быть переведены при помощи инверсии в две концентрические окружности.*

Окружностью, относительно которой производится такая инверсия, может быть любая окружность с центром в любой из граничных точек (O или P) непересекающегося пучка $\alpha\beta$. Если окружность α предшествует окружности β в естественном порядке от точки O к точке P, то любая окружность с центром в точке O (или P) будет переходить при инверсии относительно окружности α в большую (или меньшую) из концентрических окружностей. Если мы изменим радиус окружности инверсии, оставив на месте ее центр, то получим новую пару концентрических окружностей, *отношение радиусов которых будет тем же, что и у предыдущей пары.* Действительно, новая инверсия эквивалентна ранее рассмотренной инверсии с последующим применением подходящей дилатации. Проводя инверсию относительно окружности с центром в точке P, мы получим пару концентрических окружностей, отношение радиусов которых обратно отношению радиусов окружностей, полученных при инверсии относительно окружности с центром в точке O.

Если α и ω — любые две различные окружности, то образ окружности α при инверсии относительно окружности ω принадлежит пучку $\alpha\omega$. Действительно, любые две окружности, одновременно ортогональные к окружностям α и ω, переходят при этом в себя. Если окружность α переходит в окружность β при инверсии относительно окружности ω, то мы будем называть окружность ω *серединной окружностью* окружностей α и β. Так как окружность β принадлежит пучку $\alpha\omega$, то окружность ω принадлежит пучку $\alpha\beta$. Теперь мы готовы доказать теорему, обратную теореме 5.45.

Теорема 5.72. *Любые две окружности имеют по крайней мере одну серединную окружность. Две непересекающиеся или касающиеся окружности имеют только одну серединную окружность. Две пересекаю-*

щиеся окружности имеют две серединные окружности, ортогональные друг к другу.

Если окружности α и β пересекаются, то при помощи инверсии мы можем перевести их в пересекающиеся прямые, которые переводятся одна в другую симметрией относительно любой из биссектрис углов между ними. Окружности, которые переходят при инверсии в эти биссектрисы, и будут д в у м я искомыми серединными окружностями.

Если окружности α и β касаются, то при инверсии они переходят в параллельные прямые. Поэтому такие окружности имеют одну-единственную серединную окружность.

Если окружности α и β не пересекаются, то при инверсии они переходят в концентрические окружности, радиусы которых обозначим через a и b. Они переводятся одна в другую при инверсии относительно концентричной им окружности, радиус которой равен $\sqrt{ab}$ — среднему геометрическому радиусов этих окружностей. Окружность, которая переходит при инверсии в рассмотренную окружность радиуса $\sqrt{ab}$, и будет той единственной серединной окружностью данных окружностей α и β.

Заметим также, что если окружности α и β конгруэнтны, то их серединная окружность совпадает с их радикальной осью.

Упражнения

1. Найдите соотношение между числами c и c', при котором окружности

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 - 2bx + c' = 0$$

ортогональны.

2. Радиус серединной окружности для двух касающихся окружностей (лежащих по одну сторону от их общей касательной) является средним гармоническим радиусов этих двух данных окружностей.

3. Во что перейдут два ортогональных пучка касающихся окружностей, если провести инверсию относительно окружности с центром в их общей точке?

4. Любые две окружности могут быть переведены при помощи инверсии в конгруэнтные окружности.

5. Радикальная ось любых двух конгруэнтных окружностей является их серединной окружностью.

6. Любые четыре различные точки A, B, C, D могут быть переведены при помощи инверсии в вершины параллелограмма

$A'B'C'D'$ (который может быть и вырожденным в том случае, когда эти четыре вершины лежат на одной прямой, и при этом $|A'B'| = |D'C'|$ и $|A'D'| = |B'C'|$).

Указание. Рассмотрите отдельно три случая: а) $AC \parallel BD$; б) $AB \parallel CD$ или $AD \parallel BC$; в) точки A, B, C, D не лежат на одной окружности.

7. Постройте серединную окружность для двух данных непересекающихся окружностей (разных радиусов).

Указание. Считайте известным (исходя из упражнения 3, § 5) положение граничных точек пучка соосных окружностей $\alpha\beta$, где α и β — две данные непересекающиеся окружности (с разными центрами).

§ 8. Инверсное расстояние

Так как при инверсии биссектрисы углов переходят в биссектрисы углов, то каждая из серединных окружностей двух пересекающихся окружностей делит пополам углы между ними. Соответственно, разумно задать вопрос: нельзя ли определить подобную числовую характеристику для двух непересекающихся окружностей, которая бы «делилась пополам» их единственной серединной окружностью. Так поставленный вопрос приводит нас к созданию для любых двух непересекающихся окружностей α и β их *инверсного расстояния* (α, β), обладающего тем свойством, что если окружность γ принадлежит пучку непересекающихся окружностей $\alpha\beta$ и окружность β лежит между окружностями α и γ, то

$$(\alpha, \beta) + (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma). \tag{5.801}$$

Произведя инверсию относительно окружности с центром в одной из граничных точек, мы получаем три концентрические окружности, радиусы которых a, b, c удовлетворяют либо условию $a > b > c$, либо условию $a < b < c$ и, конечно, тождеству

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}.$$

Заметив, что при логарифмировании произведение переходит в сумму, мы определяем

$$(\alpha, \beta) = \left|\log \frac{a}{b}\right|, \tag{5.802}$$

т. е. равное $\log (a/b)$, если $a > b$, или $\log (b/a)$, если $b > a$. Для рассмотренных концентрических окружно-

стей таким образом введенное расстояние, очевидно, удовлетворяет уравнению (5.801).

Под знаком log можно было бы понимать «логарифм при основании десять», так что соотношение $x = \log y$ обозначало бы, что $y = 10^x$. Однако привычка использовать основание десять сложилась в силу того, что у большинства людей на руках десять пальцев. Математически же гораздо удобнее заменить число десять на трансцендентное число

$$e = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} = 2{,}7182818284590\ldots,$$

при этом соотношение $x = \log y$ (часто записываемое $\ln y$, где n отражает название — «натуральный логарифм») означает, что

$$y = e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!},$$

а сам натуральный логарифм *) может быть выражен столь же замечательным рядом

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots$$

Договоримся определять *инверсное расстояние между любыми двумя непересекающимися окружностями как натуральный логарифм отношения радиусов (большего к меньшему) двух концентрических окружностей, в которые данные окружности могут быть переведены при помощи инверсии.*

Так как концентрические окружности при инверсии переходят в соосные окружности, то так введенное расстояние аддитивно, в смысле соотношения (5.801), для элементов соосного пучка. В частности, *серединная окружность любых двух непересекающихся окружностей делит пополам инверсное расстояние между ними.* Рассматривая две параллельные прямые как предельное положение двух концентрических окружностей, мы видим, что две касающиеся окружности могут соответственно рассматриваться как находящиеся на инверсном расстоянии нуль.

*) См. ([41], стр. 37 и следующие).

Если мы имеем две (неконцентрические) окружности, одна из которых находится внутри другой, и еще несколько окружностей, последовательно касающихся друг друга, а также касающихся двух первоначально заданных окружностей, как на рисунке 112, то может случиться так, что последовательность касающихся окружностей замкнется в кольцо из n окружностей, в котором последняя окружность касается первой. В этом случае, очевидно, в качестве первой окружности кольца мы можем принять произвольную окружность, касающуюся двух первоначально данных. Подобным образом построенное кольцо вновь замкнется и будет содержать также n окружностей.

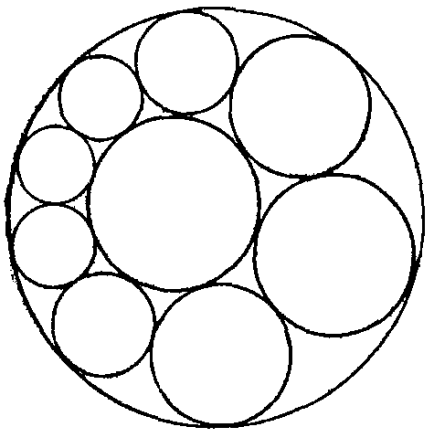


Рис. 112.

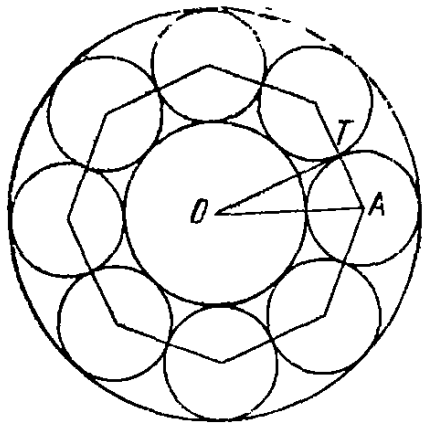


Рис. 113.

Из теоремы 5.71 следует удивительно простое доказательство этого результата, известного как *поризм**) *Штейнера* ([38], стр. 53 и [43], т. II, стр. 199, 507). А именно: произведем инверсию, переводящую первоначальные окружности в концентрические; тогда остальные образуют кольцо конгруэнтных окружностей с центрами в вершинах правильного n-угольника, как на рисунке 113. Здесь точка A — центр одной из окружностей, T — точка ее касания с одной из соседних окружностей кольца, и точка O — общий центр двух концентрических окружностей. Обозначим радиус внешней окружности через a, а радиус внутрен-

*) Поризмом называют математическое предложение, занимающее промежуточное положение между теоремой и задачей на построение. — *Прим. перев.*

ней — через b; тогда в прямоугольном треугольнике OAT

$$|OA| = (a+b)/2, \quad |AT| = (a-b)/2, \quad \widehat{AOT} = \pi/n$$

([20], стр. 3). Так как радиусы этих концентрических окружностей равны a и b, то инверсное расстояние между ними $\delta = \log(a/b)$ удовлетворяет соотношению

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{|AT|}{|OA|} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a/b)-1}{(a/b)+1} = \frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1}.$$

Отсюда следует, что поризм Штейнера выполняется всякий раз, когда инверсное расстояние между рассматриваемыми первоначальными окружностями удовлетворяет этому же уравнению

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1}.$$

Решая это уравнение относительно e^{δ}, мы получим

$$e^{\delta} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}} = \left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^2 = \left(\sec\frac{\pi}{n} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

откуда находим

$$\delta = 2\log\left(\sec\frac{\pi}{n}\right). \tag{5.803}$$

В частности, задавая $n = 4$, мы получаем, что любые две окружности, инверсное расстояние между которыми равно

$$2\log(\sqrt{2}+1),$$

принадлежат к конфигурации из шести окружностей, каждая из которых касается четырех других. Эти шесть окружностей распадаются на три пары «противоположных», так что каждая окружность касается всех других, кроме своей противоположной. Инверсное расстояние между любыми двумя противоположными окружностями равно $2\log(\sqrt{2}+1)$, а оставшиеся двенадцать расстояний, конечно, равны нулю.

Поризм Штейнера остается справедливым и в том случае, если цепочка окружностей замыкается не

после одного, а после d полных оборотов. В этом случае мы должны заменить во всех формулах число n на дробь n/d.

Так как окружность может иметь произвольный радиус и так как ее центр задается двумя координатами, то множество всех окружностей в евклидовой плоскости (а также и в круговой плоскости) представляет собой трехпараметрическое семейство или совокупность троек чисел, каждое из которых может принимать бесконечное число значений. Если мы рассмотрим интерпретацию этого семейства окружностей на круговой плоскости в виде совокупности плоскостей трехмерного пространства, то мы сможем получить знаменитую «неевклидову» геометрию, которая была открыта независимо (между 1820 и 1830 годами) Гауссом, Больаи и Лобачевским. Углы между двумя пересекающимися окружностями соответствуют углам между двумя плоскостями, пересекающимися по прямой; две касающиеся окружности соответствуют двум «параллельным» плоскостям; инверсное расстояние между двумя непересекающимися окружностями соответствует расстоянию между двумя «ультрапараллельными» плоскостями, которые имеют общую перпендикулярную прямую, причем расстояние между ними измеряется вдоль этой прямой *).

Упражнения

1. В случае поризма Штейнера точки касания смежных окружностей кольца лежат на серединной окружности двух первоначальных окружностей. (Более того, серединная окружность двух произвольных окружностей α и β может быть описана как множество точек P, таких, что две окружности, касающиеся одновременно окружностей α и β, касаются друг друга в точке P.)

2. Равенство (5.803) эквивалентно равенству

$$\delta = 2 \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right).$$

3. Нарисуйте три конгруэнтные окружности, касающиеся друг друга, и второе множество из трех таких же окружностей, каждая из которых касается двух окружностей из первого множества. Каковы инверсные расстояния между этими шестью окружностями?

---

*) См. H. S. M. Coxeter, Non-Euclidean Geometry, (5th ed.), Toronto, 1965, стр. 265—266, или [35], или [44].

§ 9. Гиперболические функции

В этом параграфе мы рассмотрим красивую аналогию между тригонометрическими функциями углов, образованных пересекающимися окружностями, и так называемыми гиперболическими*) функциями инверсных расстояний между парами непересекающихся окружностей. *Гиперболический синус*, *гиперболический косинус* и *гиперболический тангенс* определяются через показательную функцию формулами

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

из которых, как легко видеть, следует, что

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

Некоторые важные тождества указаны в левой колонке приведенной ниже таблицы, а в правой колонке даются аналогичные тригонометрические тождества.

$\operatorname{sh} 0 = 0, \quad \operatorname{ch} 0 = 1$	$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$
$\operatorname{th} 0 = 0, \quad \operatorname{th} \infty = 1$	$\operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$
$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$	$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$
$\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$	$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$
$\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}$	$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$
$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

В этих обозначениях равенство (5.803) может быть переписано как

$$\operatorname{th} \frac{\delta}{2} = \sin \frac{\pi}{n}, \quad \text{или} \quad \operatorname{sh} \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

*) Почему «гиперболические»? См. [17], стр. 189—190 и [41], стр. 24. Неевклидову геометрию Гаусса, Больаи и Лобачевского называют *гиперболической геометрией*. Обоснование этого названия можно найти в [44].

или

$$\operatorname{ch}\frac{\delta}{2} = \sec\frac{\pi}{n}.$$

Возможно, покажется не слишком странным сравнение роли гиперболических функций в математике с ролью радикала аммония NH_4 в химии *). Этот радикал ведет себя как атом натрия или калия, хотя его можно разложить на атомы азота и водорода. Что-то похожее происходит и с гиперболическими функциями: они ведут себя подобно тригонометрическим функциям, хотя их можно выразить через показательные функции. (Нужно признать, что такой экскурс в область химии меньше понравится читателю, который, изучив функции комплексной переменной, понимает значение формул $\cos x = \operatorname{ch} ix$, $i \sin x = \operatorname{sh} ix$.)

Возвращаясь к нашему обсуждению углов и расстояний между парами окружностей, давайте рассмотрим две окружности с радиусами a и b такие, что (обычное) расстояние между их центрами равно c. Если каждая из величин a, b, c меньше, чем сумма двух других, то окружности пересекаются в двух точках. Любая из этих точек вместе с центрами окружностей образует треугольник, длины сторон которого равны a, b, c. Один из двух дополнительных углов, образующихся при пересечении окружностей, равен углу между сторонами a и b треугольника, и поэтому его косинус (из теоремы косинусов) равен

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Посмотрим, не сможем ли мы указать геометрический смысл этого выражения

$$\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

в том случае, когда одно из чисел a, b, c больше, чем сумма двух других, т. е. когда окружности не пересекаются. Например, они могут быть двумя концентрическими окружностями (если $c = 0$), диаметры которых AA' и BB' лежат на одной прямой и удовлетво-

*) A. E. H. Tutton, Crystals, Kegan Paul, London, 1911, стр. 82.

ряют соотношению $AB'//A'B$, как на рисунке 114. Теперь используем инверсное расстояние $\delta = \log(a/b)$ в выражении для сложного отношения

$$\{AA',\ BB'\} = \frac{|AB|\cdot|A'B'|}{|AB'|\cdot|A'B|} =$$

$$= \left(\frac{|AB|}{|AB'|}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2\delta} + 1 - 2e^\delta}{e^{2\delta} + 1 + 2e^\delta} = \frac{e^\delta + e^{-\delta} - 2}{e^\delta + e^{-\delta} + 2} = \frac{\operatorname{ch}\delta - 1}{\operatorname{ch}\delta + 1}.$$

Пусть эти окружности являются образами при инверсии двух непересекающихся окружностей, тогда для

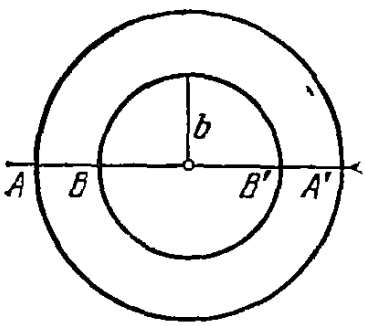


Рис. 114.

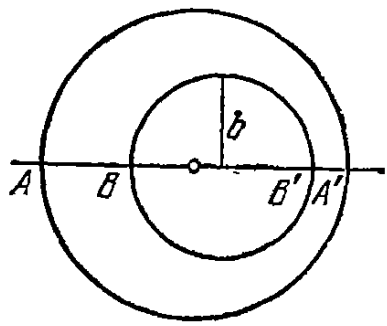


Рис. 115.

удобства мы вновь обозначим через c расстояние (обычное) между центрами этих окружностей, а через a и b их радиусы; соответственно, точки A, A', B, B' будут точками их пересечения с линией центров (при этом $AB'//A'B$, как и раньше). Согласно теоремам 5.42 и 5.43, сложное отношение и свойство быть разбиением сохраняются при инверсии, поэтому останется справедливым

$$\{AA',\ BB'\} = \frac{\operatorname{ch}\delta - 1}{\operatorname{ch}\delta + 1},$$

однако это сложное отношение нам нужно выразить теперь через новые значения a, b и c. Если $a - b > c$, как на рисунке 115, то мы имеем

$$\{AA',\ BB'\} = \frac{|AB|\cdot|A'B'|}{|AB'|\cdot|A'B|} = \frac{(a+c-b)(a-c-b)}{(a+c+b)(a-c+b)} =$$

$$= \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2 + c^2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

откуда $\operatorname{ch}\delta = \gamma$. Аналогично, если $a + b < c$, как на рисунке 116, то

$$\{AA', BB'\} = \frac{|AB| \cdot |A'B'|}{|AB'| \cdot |A'B|} = \frac{(c-a-b)(c+a+b)}{(c-a+b)(c+a-b)} =$$

$$= \frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 - 2ab}{-a^2 - b^2 + c^2 + 2ab} = \frac{-\gamma - 1}{-\gamma + 1},$$

откуда $\operatorname{ch}\delta = -\gamma$. Объединяя эти результаты, мы видим, что доказана

Теорема 5.91. *Если c — (обычное) расстояние между центрами двух непересекающихся окружностей*

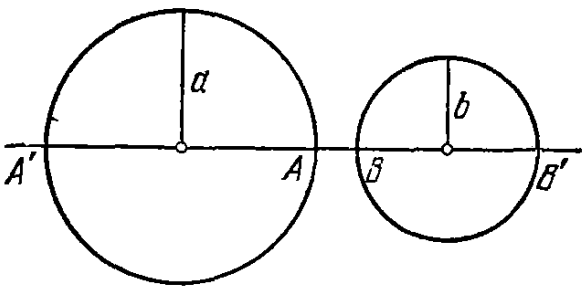


Рис. 116.

с радиусами a и b, то инверсное расстояние δ между этими окружностями задается формулой *)

$$\operatorname{ch}\delta = \left|\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right|.$$

Интересное приложение этой теоремы можно получить при рассмотрении четырехугольника, все вершины которого лежат на одной окружности (радиуса a), а все стороны касаются другой окружности (радиуса b). Известно**), что (обычное) расстояние между центрами таких окружностей удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{b^2},$$

---

*) График функции $y = \operatorname{ch} x$ обычно называют *цепной линией*: такую форму приимает цепочка, подвешенная за оба конца ([17], стр. 455).

**) ([11], стр. 91—95 или [42], стр. 34, 267). В книге J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, Oxford, 1916, стр. 45—46, утверждается, что открытие этой формулы принадлежит Л. Эйлеру, как и открытие аналогичной формулы $\frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r}$ для треугольника (см. теорему 2.12).

которое может быть выражено в виде

$$|a^2+b^2-c^2|=b\sqrt{4a^2+b^2}$$

или

$$\operatorname{ch}\delta=\frac{|a^2+b^2-c^2|}{2ab}=\frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{2a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}.$$

Так как

$$\operatorname{ch}^2\delta=1+\operatorname{sh}^2\delta,$$

то отсюда следует, что инверсное расстояние между окружностями, которые имеются у вписанно-описанного четырехугольника, выражается через их радиусы с помощью простой формулы

$$\operatorname{sh}\delta=\frac{b}{2a}.$$

Упражнения

1. Пусть (обычное) расстояние между центрами двух окружностей радиуса 1 равно $2(\sqrt{3}+1)$. Рассмотрим окружность, которая делит пополам инверсное расстояние между этими окружностями. Является ли она их серединной окружностью?

2. Инверсное расстояние δ между окружностями Содди (упражнение 4 § 4) удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{cli}\frac{\delta}{2}=2.$$

3. Пусть две окружности лежат одна вне другой и, следовательно, имеют четыре общие касательные; тогда отношение длины большей касательной к длине меньшей равно $\operatorname{th}\frac{\delta}{2}$, где δ — инверсное расстояние между этими двумя окружностями.

4. Рассмотрим прямую на расстоянии p от центра окружности радиуса b. Если $p<b$, то прямая пересекает окружность под углом δ, для которого $\cos\delta=\pm p/b$. Если же $p\geqslant b$, то инверсное расстояние δ между ними задается равенством $\operatorname{ch}\delta=p/b$.

5. Если R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, то инверсное расстояние δ между этими окружностями выражается с помощью равенства

$$\operatorname{sh}\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}.$$

Указание. Используйте теорему 2.12.

6. Рассмотрим описанную окружность и окружность девяти точек треугольника ABC. Если этот треугольник тупоугольный, то рассматриваемые окружности пересекаются под углом δ,

удовлетворяющим равенству

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = -\cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{B} \cdot \cos \widehat{C}.$$

Если же треугольник прямоугольный или остроугольный, то инверсное расстояние δ между этими окружностями удовлетворяет равенству

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{2} = \cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{B} \cdot \cos \widehat{C}.$$

7. Инверсное расстояние между окружностями

$$x^2 + y^2 - 2ax + d^2 = 0 \qquad (a > d > 0)$$

и

$$x^2 + y^2 - 2bx + d^2 = 0 \qquad (b > d > 0)$$

равно $|\alpha - \beta|$, где

$$\operatorname{th} \alpha = \frac{d}{a}, \quad \text{а} \quad \operatorname{th} \beta = \frac{d}{b}.$$

Глава 6

ВВЕДЕНИЕ В ПРОЕКТИВНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

> Так как вы сейчас изучаете геометрию и тригонометрию, то я хочу предложить вам одну задачу. Корабль плывет в океане. Он отплыл из Бостона с грузом шерсти. Он весит 200 тонн. Он направляется в Гавр. На борту 12 пассажиров. Ветер дует на восток-северо-восток. На часах четверть четвертого. Месяц — май. Сколько лет капитану?
>
> *Гюстав Флобер*

Во всех преобразованиях, которые мы рассматривали до сих пор, точки переходили в точки. Наиболее характерной чертой «проективной» плоскости является принцип двойственности, который дает нам возможность преобразовывать точки в прямые, а прямые в точки. Одним из таких преобразований, несколько похожим на инверсию, является «полярное преобразование» относительно данной окружности. Каждая точка, за исключением центра O этой окружности, преобразуется в некоторую прямую; каждая прямая, не проходящая через точку O, преобразуется в некоторую точку, а каждая окружность преобразуется в «коническое сечение», у которого точка O является «фокусом». В этой главе мы обсудим различные виды конических сечений, а в конце проведем тщательное сравнение инверсивной и проективной геометрий.

§ 1. Полярное преобразование

Здесь, как и при инверсии (§ 3 гл. 5), мы используем окружность ω с центром в точке O и радиусом k. Каждой точке P (отличной от точки O) ставится в соответствие прямая p, называемая *полярой* точки P, перпендикулярная к прямой OP и проходящая через точку P' — *образ* точки P при инверсии относительно окружности ω (рис. 117). И, наоборот, каждой прямой p (не проходящей через точку O) ставится в соответствие точка P, называемая *полюсом* прямой p, — образ при инверсии относительно окружности ω основания перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую p. Меняя местами точки P и P' на рисунке 102,

мы видим, что в том случае, когда точка P лежит вне окружности ω, ее поляра проходит через точки касания двух касательных, проведенных из точки P. В том случае, когда точка P лежит на окружности ω, очевидно, что ее полярой является касательная к этой окружности в точке P. Это единственный случай, когда точка P и прямая p — *инцидентны* (т. е. точка P лежит на прямой p, и прямая p проходит через точку P). Нам будет удобно использовать согласованные обозначения для точек и прямых так, чтобы поляры точек A, B, ... были прямыми a, b, ..., а полюс любой

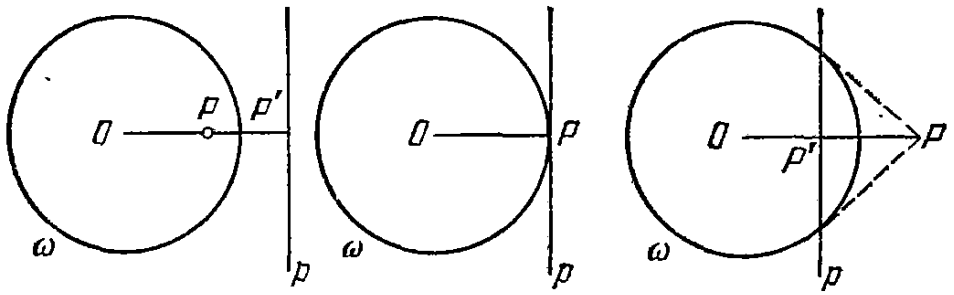


Рис. 117.

прямой обозначался соответствующей большой буквой.

Для любой точки A (за исключением точки O) обозначим через A' ее образ при инверсии, а через a — ее поляру (как на рисунке 118). Для произвольной точки B, лежащей на прямой a, построим прямую AB', перпендикулярную прямой OB. Тогда треугольники OAB' и OBA' подобны и

$$|OB| \cdot |OB'| = |OA| \cdot |OA'| = k^2.$$

Следовательно, точка B' является образом точки B при инверсии относительно окружности ω, и прямую AB' мы сможем обозначить через b, так как она является полярой точки B. Обратно, любая прямая b, проходящая через точку A (за исключением прямой OA) порождает перпендикулярную ей прямую OB, что дает нам возможность восстановить тот же рисунок. Итак, доказана

Теорема 6.11. *Если точка B лежит на прямой a, то прямая b проходит через точку A.*

Если мы зафиксируем точку A и прямую a и рассмотрим поляры b для точек B, лежащих на прямой a, то увидим, что все эти прямые проходят через точку A — полюс прямой a. Другими словами, поляры множества коллинеарных точек образуют множество конкурентных прямых. Этот процесс, сохраняющий свойство инцидентности, при котором точки и прямые преобразуются в их поляры и полюсы, называется

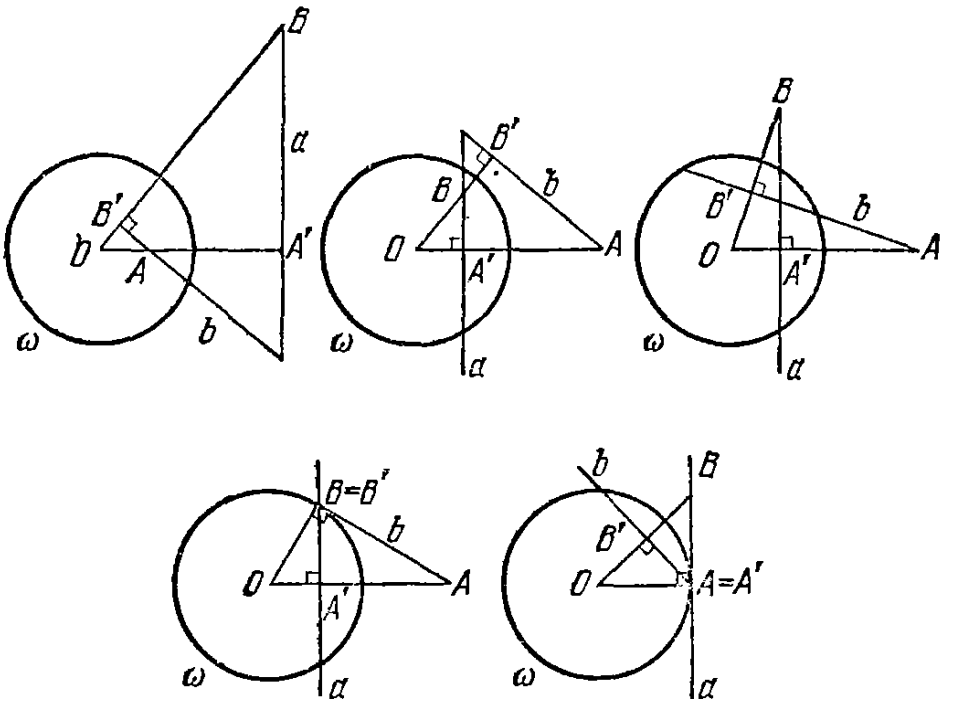


Рис. 118.

полярным преобразованием. Все это естественно приводит нас к *принципу двойственности*, который утверждает, что для любой конфигурации, состоящей из прямых и точек, в которой определенные точки лежат на определенных прямых, существует двойственная ей конфигурация из прямых и точек, в которой определенные прямые проходят через определенные точки. Например, фигура, двойственная полному четырехугольнику $ABCD$ (состоящему из четырех точек, никакие три из которых не коллинеарны, и шести соединяющих их прямых: AD, BD, CD, BC, AC, AB), есть полный четырехсторонник $abcd$ (состоящий из четырех прямых, никакие три из которых не конкурентны,

и шести их точек пересечения: $a \cdot d$, $b \cdot d$, $c \cdot d$, $b \cdot c$, $a \cdot c$, $a \cdot b$).

Мы будем рассматривать окружность в двух аспектах: первый — обычный — как *множество точек* и второй — как совокупность всех касающихся ее прямых, которую мы будем называть *оболочкой* (рис. 119). Каждая касательная является предельным положением секущей, при сближении точек ее пересечения с окружностью. Соответственно каждая точка касания является предельным положением точки пересечения двух касательных, при сближении этих касательных *). Таким образом, полярное преобразование меняет местами точечные множества и их оболочки. Окружность

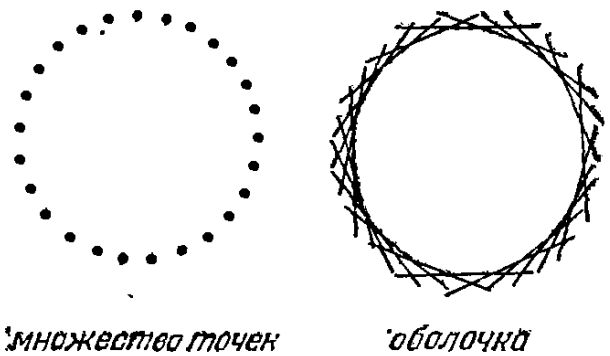


Рис. 119.

ω, рассматриваемая как множество точек или как оболочка, переходит при полярном преобразовании в ту же самую окружность, рассматриваемую в противоположном аспекте. Аналогично, окружность с центром в точке O радиуса r переходит при полярном преобразовании (с таким же изменением аспекта) в концентричную ей окружность радиуса k^2/r.

Теорему, двойственную к данной теореме, как и построение, двойственное к данному построению, можно очень просто получить при помощи замены слов в соответствии со следующим «словарем». (Если нам встречается слово, принадлежащее одной из колонок, то мы должны его заменить на соответствующее слово из другой колонки.)

*) Подробнее см. [6]. *Прим. перев.*

точка	прямая
лежит на	проходит через
прямая, проходящая через две точки	точка пересечения двух прямых
конкурентны	коллинеарны
четырехугольник	четырехсторонник
полюс	поляра
множество точек	оболочка
касательная	точка касания

В том случае, когда две точки и две прямые расположены так, как указано в теореме 6.11 (т. е. каждая из точек лежит на поляре другой точки), мы называем точки A и B *сопряженными точками*, а прямые a и b — *сопряженными прямыми*. Таким образом, поляра точки A есть множество точек, сопряженных с точкой A, а полюс прямой a есть оболочка из прямых, сопряженных с прямой a. (Устремляя радиус окружности к нулю, мы можем обосновать представление точки в виде «оболочки» из прямых, проходящих через нее. В частности, любая точка на касательной a сопряжена с точкой касания A, которая является самосопряженной точкой, а любая прямая, проходящая через точку A (лежащую на окружности ω), сопряжена с прямой a, которая является самосопряженной прямой.

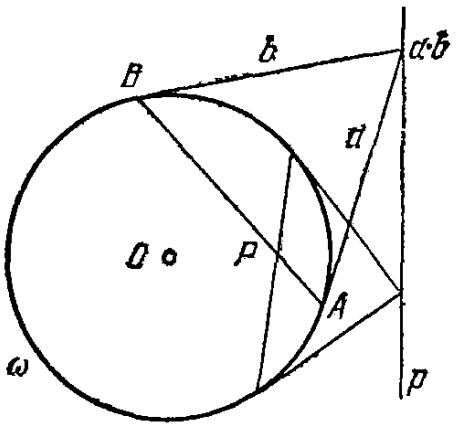


Рис. 120.

Полюс любой прямой AB (не проходящей через точку O) лежит на полярах обеих точек A и B и, таким образом, может быть описан как точка пересечения $a \cdot b$. Например, если точки A и B лежат на окружности ω, как на рисунке 120, полюс секущей AB есть точка пересечения касательных a и b. Соответственно, любая точка, лежащая вне окружности ω, принадлежит двум касательным, скажем, a и b, а ее поляра может быть построена как секущая, соединяющая точки касания A и B.

У любой прямой p существуют точки, лежащие вне окружности ω. Если прямая p не является диаметром,

то ее полюс P принадлежит полярам всех этих внешних точек и может быть построен как точка пересечения поляр двух из них. Соответственно любая точка P лежит на некоторых секущих. Если она не совпадает с точкой O, то ее поляра p содержит полюсы всех этих секущих и может быть построена как прямая, соединяющая полюсы двух из них. Мы можем подытожить эти результаты в следующем утверждении:

Теорема 6.12. *Полюс любой секущей AB (за исключением диаметра) является общей точкой касательных в точках A и B. Поляра любой внешней точки является прямой, соединяющей точки касания двух касательных, проходящих через эту точку. Полюс любой прямой p (за исключением диаметра) является общей точкой поляр двух внешних точек, лежащих на прямой p. Поляра любой точки P (за исключением центра) является прямой, соединяющей полюсы двух секущих, проходящих через точку P.*

Стоит заметить, что если заданы окружность ω, относительно которой производится полярное преобразование, и все ее касательные, то рассмотренные построения используют лишь инцидентность точек и прямых; при этом нет необходимости в каких-либо измерениях. Эта черта характерна для проективной геометрии.

Упражнения

1. Поляра произвольной точки A относительно окружности ω с центром O (не совпадающим с точкой A) может быть построена как радикальная ось двух окружностей: окружности ω и окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре.

2. Один из углов между полярами точек A и B равен углу AOB.

3. Вершины и стороны (рассматриваемые как прямые) правильного n-угольника с центром в точке O переходят при полярном преобразовании в стороны и вершины другого правильного n-угольника.

4. Прямоугольник с центром в точке O переходит при полярном преобразовании в ромб.

§ 2. Полярная окружность треугольника

Если все четыре точки A, B, A', B', изображенные на рисунке 118, различны, то треугольник ABC (точка C является точкой пересечения прямых a и b) обладает тем свойством, что каждая вершина является полюсом

противоположной стороны, а любые две вершины являются сопряженными точками, и любые две стороны являются сопряженными прямыми. Более того, любые две сопряженные (но не самосопряженные) точки можно рассматривать как две вершины такого *автополярного треугольника ABC*.

Так как три части рисунка 121 (воспроизводящие первые три части рисунка 118) представляют все различные возможности выбора точек A и B, то *каждый автополярный треугольник является тупоугольным*, причем вершина тупого угла лежит внутри окружности ω, а остальные две вершины — вне нее. Обратно,

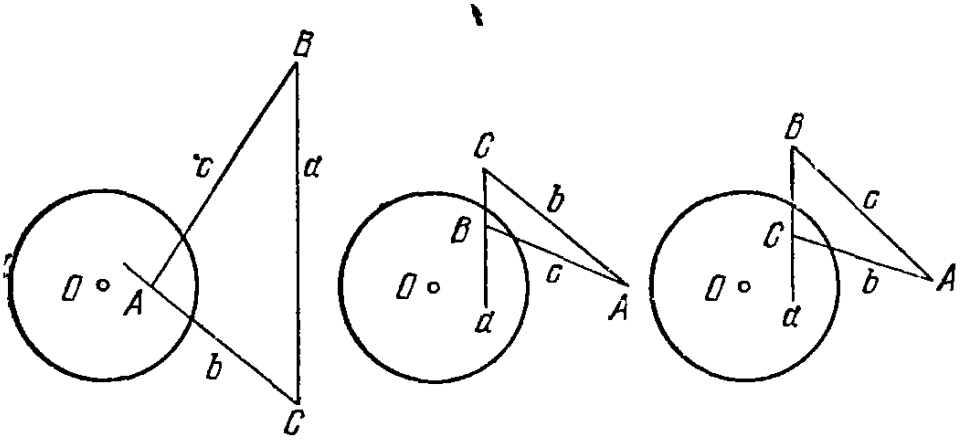


Рис. 121.

любой тупоугольный треугольник ABC имеет единственную *полярную окружность*, относительно которой этот треугольник является автополярным. Центр и радиус этой окружности могут быть найдены следующим образом. Так как прямые OA и OB являются высотами треугольника ABC, то точка O служит его ортоцентром. Если вернуться к обозначениям, использованным нами в равенстве (2.44), то центром полярной окружности будет точка H, а ее радиус будет равен

$$\sqrt{|HA|\cdot|HD|} = \sqrt{|HB|\cdot|HE|} = \sqrt{|HC|\cdot|HF|}.$$

Поэтому инверсия относительно этой окружности переводит вершины треугольника ABC в основания его высот. Рассмотрев окружности, проходящие через эти тройки точек, и вспоминая, что при инверсии окруж-

ности переходят в окружности, мы видим, что справедлива

Теорема 6.21. *Для любого тупоугольного треугольника описанная вокруг него окружность и окружность девяти точек переходят друг в друга при инверсии относительно полярной окружности этого треугольника.*

Другими словами, полярная окружность является одной из двух серединных окружностей для описанной окружности и окружности девяти точек (они пересекаются, поскольку треугольник является тупоугольным). Отсюда следует, что описанная окружность, окружность девяти точек и полярная окружность (центры которых лежат на прямой Эйлера) соосны и что (для любого тупоугольного треугольника) окружность девяти точек проходит не через девять, а через одиннадцать замечательных точек, причем последние две являются точками пересечения описанной и полярной окружностей.

Упражнение

1. В любом тупоугольном треугольнике полярная окружность пересекает описанную окружность под углом θ, для которого

$$\cos^2\theta = -\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}$$

§ 3. Конические сечения

Здесь мы рассмотрим интересные кривые, называемые *коническими сечениями*, которые кратко упоминались в §§ 8 и 9 гл. 3. Эти кривые могут быть определены многими различными способами. Одним из них является определение конического сечения как *образа окружности при полярном преобразовании.* Более точно, пусть α — окружность с центром A и радиусом r. Рассмотрим полярное преобразование этой окружности относительно окружности ω с центром в точке O. Величина радиуса k окружности ω не существенна, так как она влияет только на размер, а не на форму конического сечения. Форма определяется отношением

$$\varepsilon = |OA|/r,$$

которое называется *эксцентриситетом* конического сечения. Точка O называется его *фокусом*.

Описывая коническое сечение как образ при полярном преобразовании окружности α, мы рассматриваем его в обоих аспектах: как множество полюсов прямых, касательных к окружности α, так и как оболочку из поляр точек, лежащих на окружности α. Если $\varepsilon < 1$, т. е. точка O лежит внутри окружности α, то существует точка конического сечения на каждом луче, выходящем из точки O, и коническое сечение является овальной кривой, называемой *эллипсом* (рис. 122). В частности, эллипс с $\varepsilon = 0$ есть просто окружность. С увеличением эксцентриситета ε коническое сечение все больше и больше отличается от

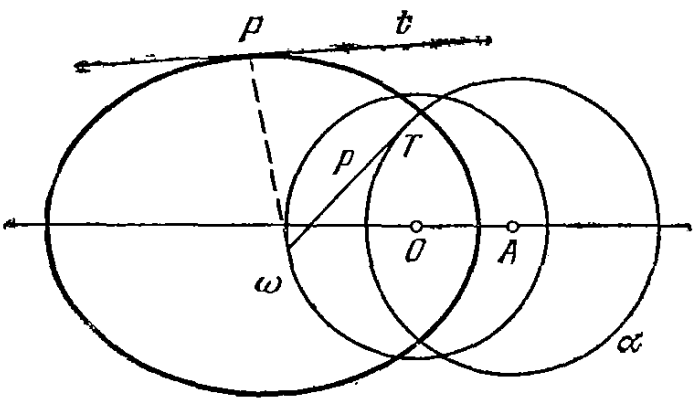


Рис. 122.

окружности. Если $\varepsilon = 1$, т. е. $|OA| = r$ и точка O лежит на окружности α, то множество точек окружности α содержит единственную точку, а именно, точку O, которая не имеет поляры (относительно окружности ω), а множество касательных к окружности α содержит одну касательную, а именно, касающуюся окружности в точке O, которая не имеет полюса. Следовательно, коническое сечение, которое мы назовем *параболой* (рис. 123), простирается до бесконечности в направлении луча AO. Коническое сечение называется *гиперболой* (рис. 124), если $\varepsilon > 1$, т. е. точка O лежит вне окружности α. Две касательные к окружности α, проходящие через точку O, не имеют полюсов, а поляры точек их касания U и V с окружностью ω называются *асимптотами* этой гиперболы. Эти две прямые u и v принадлежат оболочке и, таким

образом, являются касательными, которые не имеют точек касания! Если мы будем двигаться вдоль одной из них в любом направлении, то мы увидим, что кривая все больше и больше приближается к асимптоте, никогда ее не достигая.

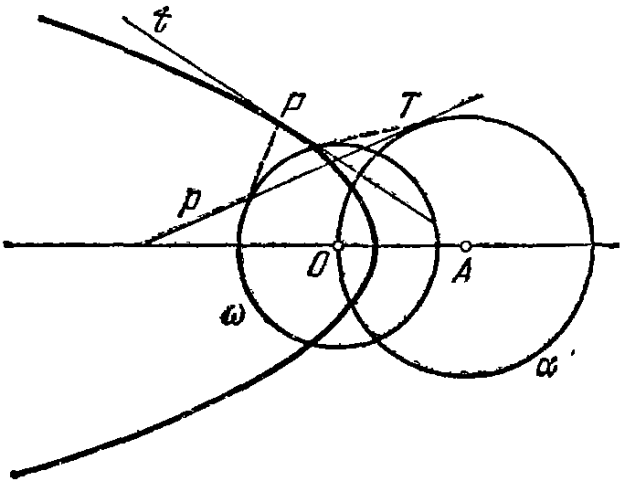


Рис. 123.

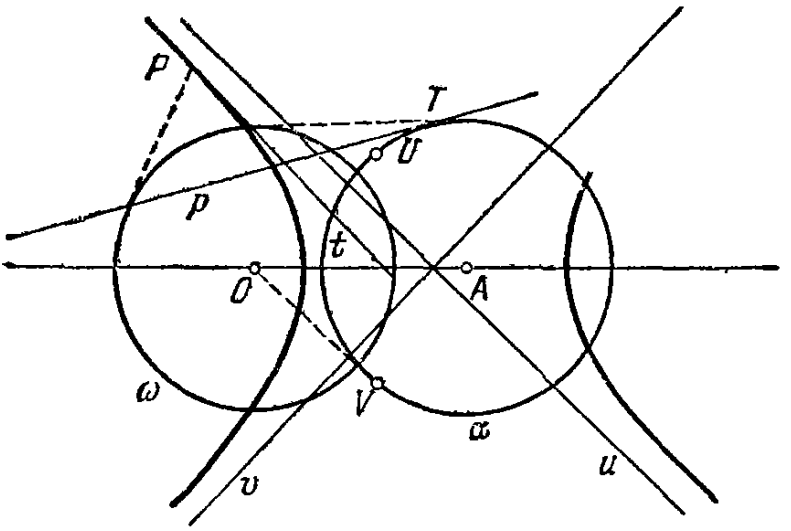


Рис. 124.

Сэр Исаак Ньютон (1642—1727) объяснил замеченную Кеплером закономерность движения планет по эллиптическим орбитам с фокусом, находящимся на солнце. С тех пор были измерены эксцентриситеты ε для орбит различных планет и комет. Некоторые из них даются в следующей таблице:

Планеты		Кометы	
Меркурий	0,2056	Энке	0,85
Венера	0,0068	Биэлы	0,76
Земля	0,0167	Холмса	0,41
Марс	0,0934	Брукса	0,47
Юпитер	0,0484	Галлея	0,967
Сатурн	0,0557	Доиати	0,9963
Уран	0,0472	Коджиа	0,9988
Нептун	0,0086	Даниэля	1,000
Плутон	0,2481	Морхауза	1,000

Упражнения

1. Нарисуйте две окружности α и β с почти равными радиусами и почти совпадающими центрами так, чтобы окружность α лежала внутри окружности β. Выберите точки A_1, A_3, A_5, ... на окружности α и B_0, B_2, B_4, ... на окружности β так, чтобы прямые B_0B_2, B_2B_4, ... касались окружности α в точках A_1, A_3, ... Обозначим через b_2, b_4 ... прямые A_1A_3, A_3A_5, ..., а через C_1, C_3, ... точки пересечения касательных к окружности β, проведенных в точках B_0 и B_2, B_2 и B_4, ... Тогда прямые b_2, b_4, ... являются касательными к образу окружности β при полярном преобразовании относительно окружности α, а точки C_1, C_3, ... лежат на образе окружности α при полярном преобразовании относительно окружности β.

2. Образ окружности α при полярном преобразовании относительно неконцентричной с ней окружности ω симметричен относительно линии их центров. Может ли коническое сечение иметь вторую ось симметрии?

3. Основания перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на касательные к ней, лежат на одной прямой.

4. Угол θ между любой асимптотой гиперболы и прямой OA (рис. 124) определяется из равенства $\sec\theta = \varepsilon$. Получите отсюда эксцентриситет *прямоугольной* гиперболы, угол между асимптотами которой является прямым.

5. Что случится с кометой, орбита которой имеет эксцентриситет $\varepsilon \geqslant 1$?

§ 4. Фокус и директриса

Если коническое сечение рассматривается как образ при полярном преобразовании окружности с центром в точке A (относительно окружности ω), то поляра точки A называется *директрисой* (соответствующей фокусу O) этого конического сечения. Расстояние от фокуса до произвольной точки называется *фокаль-*

ным расстоянием этой точки. Теперь мы приступаем к выводу одного из самых замечательных свойств конического сечения (доказательство которого в IV веке н. э. было найдено Паппом Александрийским; однако, возможно, оно было известно уже Евклиду, жившему шестью столетиями раньше),

Теорема 6.41. *Для любой точки P на коническом сечении с эксцентриситетом ε, фокусом O и директрисой a ее фокальное расстояние $|OP|$ равно произведению числа ε на расстояние от точки P до директрисы a.*

На рисунках 125—127 точка P является полюсом (относительно окружности ω) прямой p, которая касается окружности α в точке T, пересекает прямую OA в точке M и пересекает прямую OP в точке P' (образе точки P при инверсии относительно окружности ω). Директриса и поляра точки M пересекают прямую OA в точках A' (образе точки A при инверсии) и M' (образе точки M при инверсии); кроме того, точка K является основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую a. Мы хотим доказать, что $|OP| = \varepsilon|PK|$. Для того чтобы учесть все возможности, мы будем считать все расстояния, рассматриваемые на прямой OA, направленными расстояниями *) (т. е. $OM - OA = AM$, даже если точка O лежит между точками M и A). Введя k и r — радиусы окружностей ω и α, мы получим

$$\frac{|PK|}{|OP|} = \frac{|OA' - OM'|}{|OP|} = \frac{k}{|OP|}\left|\frac{OA'}{k} - \frac{OM'}{k}\right| =$$

$$= \frac{|OP'|}{k}\left|\frac{k}{OA} - \frac{k}{OM}\right| = \frac{|OP'|}{|OM|} \cdot \left|\frac{OM}{OA} - 1\right| =$$

$$= \frac{|AT|}{|AM|}\,\frac{|AM|}{|OA|} = \frac{r}{|OA|} = \frac{1}{\varepsilon},$$

что и требовалось.

Обратно,

Теорема 6.42. *Для любой точки O, любой прямой a, не проходящей через точку O, и любого положительного числа ε множество точек, расстояние каждой из которых от точки O равно расстоянию*

---

*)' То есть обращаться с ними как с направленными отрезками (см. § 1, гл. 2). — *Прим. перев.*

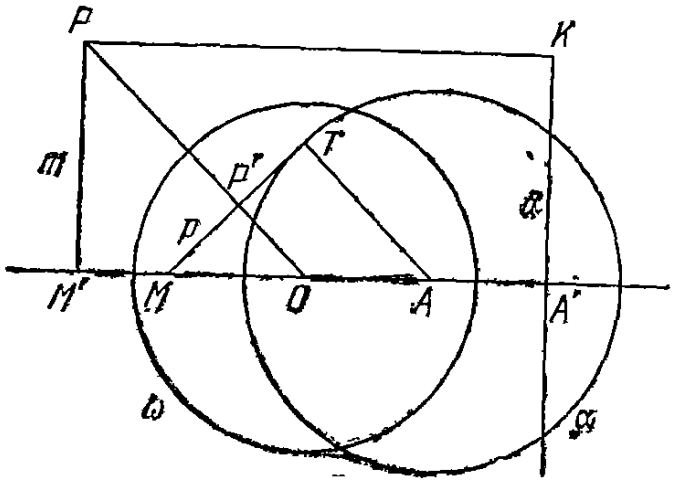


Рис. 125.

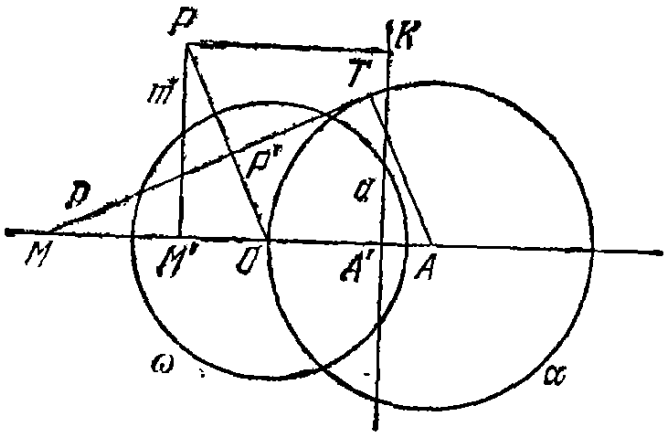


Рис. 126.

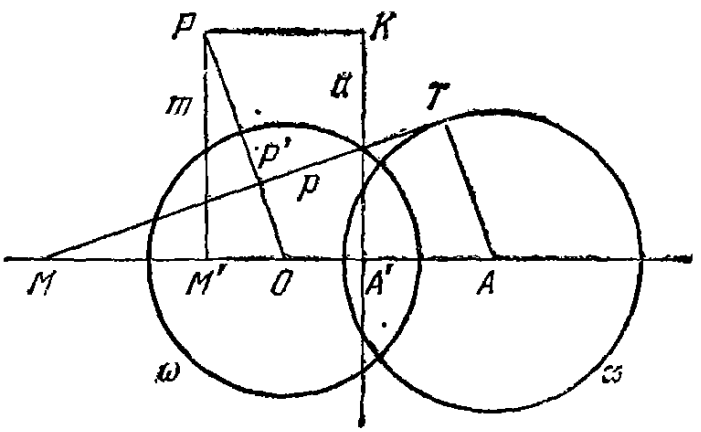


Рис. 127.

до прямой a, умноженному на ε, является коническим сечением.

Это легче всего увидеть, приняв в качестве окружности ω с центром в точке O такую окружность, которая касается прямой a; при этом точка A становится точкой касания. Тогда окружностью α является окружность с центром в точке A радиуса $|OA|/\varepsilon$.

Упражнения

1. Получите уравнение, связывающее декартовы координаты множества точек P, расстояния которых от начала координат равны произведению числа ε на расстояния их до прямой $x = l/\varepsilon$.

2. Если $\varepsilon \neq 1$, то множество, описанное в упражнении 1, пересекает ось Ox дважды. Передвиньте ось Oy так, чтобы новое начало координат находилось ровно посередине между двумя этими точками пересечения. Упростите уравнение, используя константы $a = \dfrac{l}{1-\varepsilon^2}$ и $b^2 = la$ вместо ε и l. Какие выводы можно сделать из этого уравнения о симметричности рассматриваемой кривой?

§ 5. Проективная плоскость

Изучая полярное преобразование, мы установили, что оно переводит почти каждую точку в прямую и почти каждую прямую в точку. Исключение составляют точка O, не имеющая поляры, и прямые, проходящие через точку O, не имеющие полюсов. В случае инверсии мы избавились от исключений, расширив евклидову плоскость до круговой плоскости. В рассматриваемом случае мы избавляемся от исключений с помощью другого ее расширения — расширения до *проективной плоскости*. Мы вводим *бесконечно удаленную прямую* l_∞, которая будет полярой точки O, и ее точки (*бесконечно удаленные точки*), являющиеся полюсами прямых, проходящих через точку O. Свойства новой прямой и новых точек определяются тем, что при проективном преобразовании все точки, лежащие на прямой a, переходят во все прямые, проходящие через ее полюс A. Если прямая a проходит через точку O, то поляры точек, лежащих на ней, образуют «пучок» параллельных прямых, состоящий из всех прямых, перпендикулярных к прямой a. Следова-

тельно, бесконечно удаленная точка, подобно полюсу прямой a, должна рассматриваться как общая точка пучка параллельных прямых. Отсюда следует, что на проективной плоскости отсутствуют исключения для утверждения:

Любые две различные прямые a и b определяют единственную точку $a \cdot b$.

Фактически любая теорема об инцидентности точек и прямых порождает двойственную ей теорему о прямых и точках, а именно, о полярах и полюсах точек и прямых первоначальной теоремы. Например, мы можем считать, что стороны шестиугольника, описанного вокруг окружности ω, являются касательными в вершинах шестиугольника, вписанного в ту же самую окружность. Таким образом, теорема Паскаля (§ 8 гл. 3) и теорема Брианшона (§ 9 гл. 3) двойственны, и любая из них может быть выведена из другой при помощи полярного преобразования относительно окружности ω. Более того, теорема Паскаля (или Брианшона), примененная к произвольной окружности, порождает теорему Брианшона (или Паскаля) для конического сечения, в которое переходит при полярном преобразовании эта окружность.

Теперь мы можем упростить формулировку теоремы 6.12, опустив исключения, помещенные в круглых скобках. Более того, если мы рассмотрим эту теорему по отношению к произвольной окружности α вместо окружности ω, то мы сможем использовать окружность ω для перевода окружности α в коническое сечение α'. Тогда наши построения для полюсов и поляр по отношению к окружности α перейдут в построения из «поляр» и «полюсов» *по отношению к коническому сечению α'*. Таким же способом мы сможем обобщить *полярное преобразование*, рассматривая его уже не относительно окружности, а относительно любого конического сечения (см. [6], стр. 363). Теорема 6.12 (в которой опустим заключенные в скобки исключения) состоит из четырех частей, двойственных одна другой; поэтому она остается верной при замене окружности, относительно которой производится полярное преобразование, на коническое сечение.

Если вновь рассмотреть рисунок 65, то нетрудно заметить, что прямая LM проходит через точку $N =$

$= b \cdot e$ и, аналогично, через точку $a \cdot d$. Это замечание позволяет нам преобразовать последнюю часть теоремы 6.12 так, что она укажет способ прямого построения поляры произвольной точки P (рис. 128):

Теорема 6.51. *Если точка P не лежит на коническом сечении, то ее поляра проходит через точки пересечения прямых $AB \cdot DE$ и $AE \cdot BD$, где AD и BE — любые две секущие, проходящие через точку P.*

Мы видели, что любой полюс и любая поляра по отношению к окружности α переходят при полярном

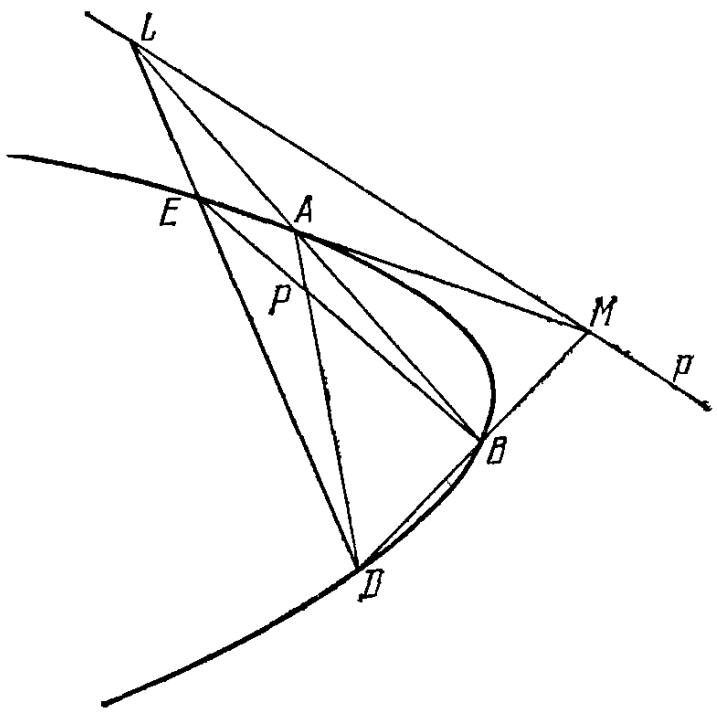


Рис. 128.

преобразовании (относительно другой окружности ω) в поляру и полюс относительно конического сечения α'. В частности (см. рис. 122—124), центр A окружности α и прямая l_∞ являются полюсом и полярой по отношению к окружности α; поэтому прямая a и точка O являются полярой и полюсом по отношению к коническому сечению α' и, следовательно, справедлива

Теорема 6.52. *По отношению к любому коническому сечению, за исключением окружности, директриса является полярой соответствующего фокуса.*

Упражнения

1. Запишите теорему 3.61 (Дезарга) в проективной форме, а также запишите ей двойственную.

2. Запишите теорему 3.51 (Паппа) в проективной форме, а также запишите ей двойственную.

3. Если автополярный треугольник для некоторой окружности имеет прямую l_∞ одной из своих сторон, то что можно сказать о двух других его сторонах?

4. Коническое сечение является эллипсом, если оно не пересекается с прямой l_∞, параболой, если касается ее, и гиперболой, если пересекает ее.

5. Асимптоты гиперболы касаются этой гиперболы в точках ее пересечения с прямой l_∞.

6. Касательные, проведенные из любой точки, лежащей на директрисе параболы, к этой параболе перпендикулярны.

7. Для любого конического сечения, проходящего через четыре вершины полного четырехугольника, точки пересечения трех пар «противоположных» сторон являются вершинами автополярного треугольника.

§ 6. Центральные конические сечения

Естественно возникает вопрос, являются ли эллипс и гипербола в действительности более симметричными, чем это непосредственно следует из наших построений этих фигур, т. е. одинаковы ли оба «конца» эллипса и одинаковы ли две отдельные «ветви» гиперболы. Из последующего обсуждения мы увидим, что предполагаемая нами дополнительная симметрия действительно имеет место.

Возвращаясь к обозначениям, использованным в теореме 6.51, мы можем утверждать, что если точка C не лежит на коническом сечении, то ее поляра проходит через точки пересечения прямых $PQ \cdot P_1Q_1$ и $PQ_1 \cdot P_1Q$, где PP_1 и QQ_1 — любые две секущие, проходящие через точку C. Если поляра точки C есть бесконечно удаленная прямая (как на рисунке 129), то это означает, что вписанный четырехугольник PQP_1Q_1 есть параллелограмм. Так как точка C не лежит на коническом сечении, то ее поляра l_∞ не является касательной к нему. Следовательно, коническое сечение не может быть параболой. Так как диагонали параллелограмма при пересечении делятся пополам, то эта точка C (являющаяся полюсом прямой l_∞) есть середина каждого из отрезков PP_1 и QQ_1, а эти отрезки могут быть любыми двумя хордами,

проходящими через точку C. В соответствии с этим, точка C называется *центром* конического сечения, а эллипс и гипербола называются *центральными коническими сечениями*. Таким образом, доказана

Теорема 6.61. *Центральное коническое сечение центрально-симметрично относительно его центра.*

При этой центральной симметрии относительно точки C фокус O и директриса a (см. § 4) переходят во второй фокус O_1 и вторую директрису a_1, как на рисунках 130 и 131. Если мы применим это же преобразование к окружностям α и ω, рассмотренным в § 3 гл. 6, то мы получим новые окружности ω_1 и α_1, такие, что то же самое коническое сечение α' будет образом окружности α_1 при полярном преобразовании относительно окружности ω_1.

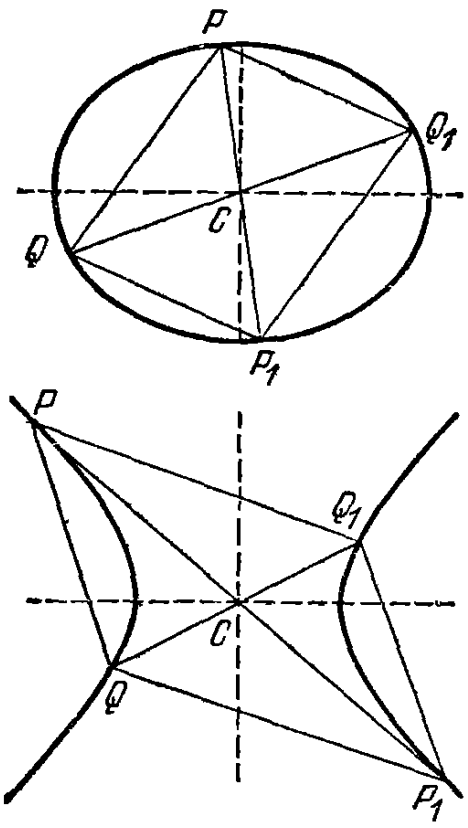


Рис. 129.

Отбрасывая тривиальный случай, когда точки O и A совпадают, мы видим, что каждое коническое сечение симметрично относительно прямой OA. В случае центрального конического сечения отсюда следует, что точка C лежит на этой прямой. Мы можем получить центральную симметрию относительно точки C в виде суммы симметрий относительно двух перпендикулярных прямых, проходящих через точку C; в качестве одной из них можно взять прямую OA. Следовательно, центральное коническое сечение также симметрично относительно прямой, проходящей через точку C перпендикулярно прямой OA. Другими словами, центральное коническое сечение обладает симметрией, аналогичной симметрии ромба или прямоугольника.

Рассмотрим теперь центр конического сечения — точку C и ее поляру c относительно окружности ω, как

на рисунках 132 и 133. Так как точка C и прямая l_∞ — полюс и поляра относительно конического сечения α', то прямая c и точка O должны быть полярой и полюсом относительно окружности α. Таким образом, точка C есть ω-полюс прямой c, которая в свою

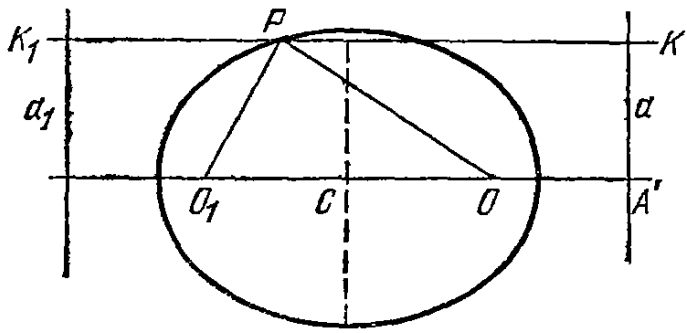


Рис. 130.

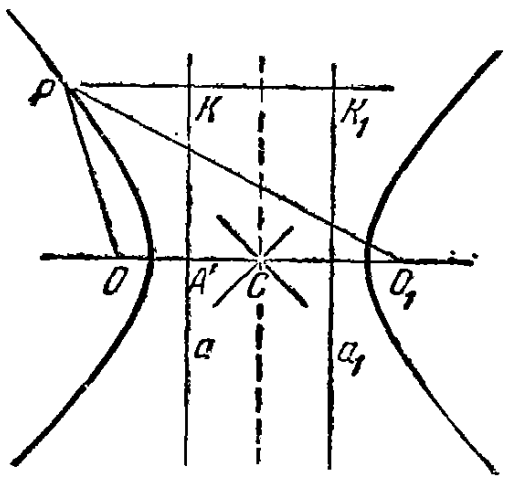


Рис. 131.

очередь есть α-поляра точки O. Другими словами, если C' — точка, в которой прямая c пересекает прямую OA, то точка C есть образ при инверсии относительно окружности ω точки C', которая является образом точки O при инверсии относительно окружности α. Так как

$$|OC| \cdot |OC'| = k^2 = |OA| \cdot |OA'|$$

и

$$r^2 = |AO| \cdot |AC'| = |OA| \cdot |C'A|,$$

то (используя обозначения направленных расстояний)

мы имеем

$$\frac{OC}{OA'} = \frac{OA}{OC'} = \frac{OA}{OA - C'A} = \frac{OA^2}{OA^2 - OA \times C'A} =$$
$$= \frac{|OA|^2}{|OA|^2 - r^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1},$$

которое отрицательно или положительно в соответствии с тем $\varepsilon < 1$ или $\varepsilon > 1$. Следовательно, для эллипса центр C и директриса a находятся по разные

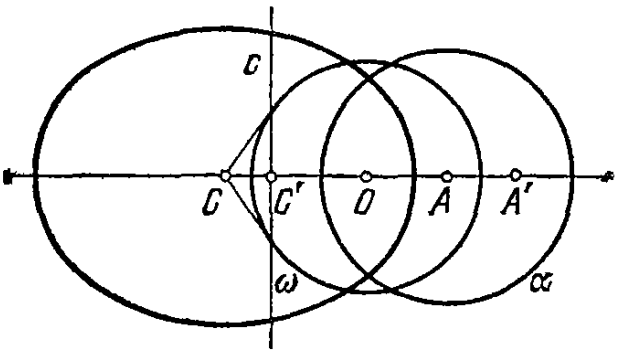


Рис. 132.

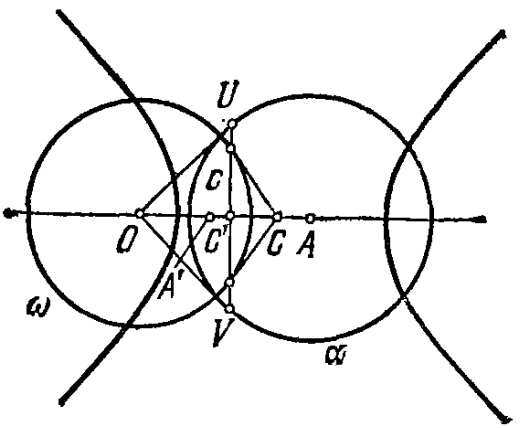


Рис. 133.

стороны от точки O, как на рисунке 130, а для гиперболы они лежат по одну и ту же сторону, как на рисунке 131. Другими словами, фокусы эллипса лежат внутри него, а сам он лежит между своими директрисами. Обе директрисы гиперболы лежат в «пустом» пространстве между ее двумя ветвями.

Из механики мы знаем, что если не принимать во внимание сопротивления воздуха, то траекторией брошенного мяча будет дуга параболы, фокус которой можно найти без особых затруднений. Так как бро-

шенный мяч на несколько секунд становится маленьким искусственным спутником, то эта наблюдаемая парабола на самом деле является сильно вытянутым эллипсом, эксцентриситет которого лишь немного меньше единицы. Где же второй ее фокус? В центре Земли!

Упражнения

1. Для любой точки P, лежащей на эллипсе, сумма ее фокальных расстояний $|OP|+|O_1P|$ постоянна (см. рис. 130).

2. Для любой точки P, лежащей на гиперболе, разность $||OP|-|O_1P||$ ее фокальных расстояний постоянна (см. рис. 131).

3. Основания перпендикуляров, опущенных из фокуса центрального конического сечения на касательные к нему лежат на одной окружности (она называется *вспомогательной* окружностью конического сечения; [24], стр. 13, 25, 155 и [33], стр. 577).

§ 7. Стереографическая и гномоническая проекции

Как мы видели в § 3 гл. 5, единственной точкой евклидовой плоскости, не имеющей образа при инверсии, является центр O окружности инверсии ω. Для того чтобы устранить это исключение и превратить инверсию во взаимно однозначное преобразование всей плоскости, мы расширили евклидову плоскость, добавив единственную *идеальную точку*, называемую бесконечно удаленной точкой, которая становится образом точки O. Эта расширенная плоскость называется *круговой* плоскостью.

Как мы видели в § 1 настоящей главы, единственной точкой евклидовой плоскости, не имеющей поляры, является центр O окружности ω, относительно которой производится полярное преобразование. Для того чтобы устранить это исключение и превратить полярное преобразование в преобразование всей плоскости, переводящее каждую точку в прямую, а каждую прямую в точку, мы расширили евклидову плоскость, добавив единственную *идеальную прямую*, называемую бесконечно удаленной прямой, которая становится полярой точки O. Эта расширенная плоскость называется *проективной плоскостью*.

Таким образом, существуют два различных, но в равной степени эффективных способа расширения евклидовой плоскости. К сожалению, они известны гораздо меньше, чем того заслуживают. Эти два расши-

рения получат новое истолкование, если мы перейдем от плоскости к пространству и проведем сравнение двух самых простых из возможных способов отображения сферы на плоскость.

Наше первое определение инверсии относительно окружности (§ 3 гл. 5) легко обобщается на случай пространства. Зададим сферу ω радиуса k с центром в точке O и точку P, отличную от точки O. *Образом* точки P при этой инверсии назовем точку P', лежащую на луче OP, расстояние которой до точки O удовлетворяет соотношению

$$|OP| \cdot |OP'| = k^2.$$

Поместив плоскость рисунка 103 в трехмерное пространство и произведя вращение вокруг линии центров OA, мы сразу же увидим, что сферы (включая и плоскости, рассматриваемые как сферы бесконечного радиуса) переходят при инверсии в сферы. В частности (рассмотрите среднюю часть рисунка 103), если α — касательная плоскость в точке A к сфере инверсии ω, то образом плоскости α будет сфера α', построенная на отрезке OA как на диаметре. Точки на плоскости α и сфере α', переходящие друг в друга при этой инверсии, могут быть получены и без помощи сферы ω. Взяв точку P на плоскости α (см. рис. 134), мы сможем построить соответствующую ей точку P', как вторую точку пересечения сферы α' с прямой OP. Обратно, задав на сфере α' произвольную точку P', отличную от точки O, мы сможем построить соответствующую ей точку P как точку пересечения прямой OP' с плоскостью α. Наше естественное желание избегать исключений вынуждает нас заменить плоскость α на круговую плоскость, добавляя единственную бесконечно удаленную точку. Эта точка будет положением точки P в

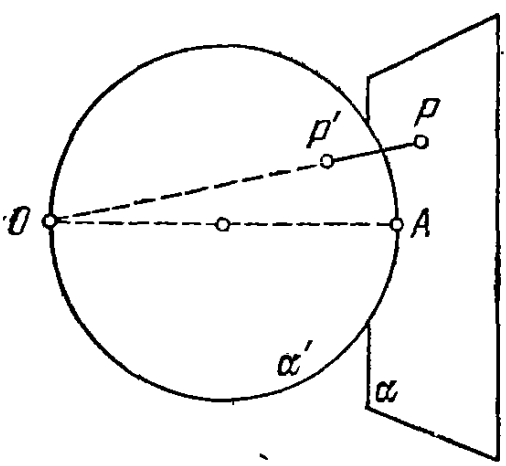


Рис. 134.

том случае, когда точка P' совпадает с точкой O ([17], стр. 145).

Такое отображение сферы α' на плоскость α называется *стереографической проекцией*. Тот факт, что этот вид проекции возникает в результате инверсии пространства, позволяет нам легко увидеть, что окружности проектируются в окружности. Действительно, так как при инверсии сферы переходят в сферы (или плоскости), а любая окружность может рассматриваться как линия пересечения двух сфер, то отсюда следует, что окружности (расположенные где-либо в пространстве, в частности, на сфере α') переходят при инверсии в окружности.

Другим способом отображения сферы α' на касающуюся ее плоскость α является *гномоническая проекция* (или «центральная проекция»). Теперь вместо проектирования из точки O (диаметрально противоположной точке A), мы проектируем из центра сферы α' (который является серединой отрезка OA). Так как любая плоскость, проходящая через эту точку, пересекает сферу по б о л ь ш о м у к р у г у, а плоскость α — по прямой, то каждая прямая на плоскости α порождается большим кругом на сфере α', а каждая точка на плоскости α — парой *диаметрально противоположных точек* сферы (таких, как P'_1 и P'_2 на рисунке 135). Обратно, любой большой круг, за исключением большого круга, плоскость которого параллельна плоскости α, позволяет нам построить соответствующую ему прямую на плоскости α как линию пересечения плоскости α с плоскостью этого большого круга. Наше естественное желание избегать исключений вынуждает нас заменить плоскость α на проективную плоскость, добавляя единственную бесконечно удаленную прямую, соответствующую исключенному большому кругу. Точки этой идеальной прямой («бесконечно удаленные точки»)

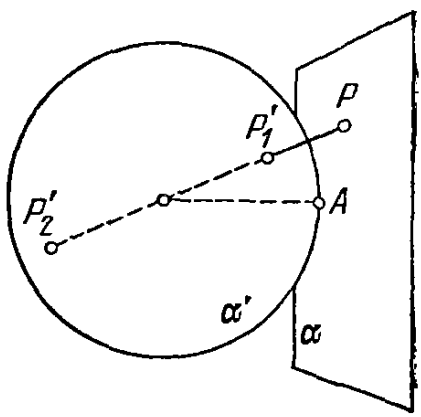


Рис. 135.

соответствуют парам диаметрально противоположных точек этого большого круга. Проективное утверждение о том, что любые две прямые имеют общую точку, соответствует тому очевидному факту, что любые два больших круга имеют общую пару диаметрально противоположных точек (т. е. что любые две плоскости, проходящие через центр сферы, пересекаются по прямой линии; [38], стр. 56).

Так как все точки проективной плоскости (включая и бесконечно удаленные точки) возникают при гномонической проекции из пар диаметрально противоположных точек на сфере, то полезно рассматривать проективную плоскость как полученную из сферы при помощи *абстрактного отождествления* каждой пары диаметрально противоположных точек, т. е. изменения значения слова «точка» так, чтобы называть такую пару одной точкой ([17], стр. 419).

Для практического картографирования ни стереографическая, ни гномоническая проекции не являются идеальными, хотя каждая из них имеет свои достоинства. Преимущество первой состоит в том, что углы между двумя направлениями в точке сохраняются и, следовательно, формы маленьких островов изображаются без изменений. Одно из преимуществ другой — то, что кратчайшие пути между двумя точками на сфере изображаются прямолинейными отрезками.

В теореме 5.41 мы установили, что сложное отношение сохраняется при инверсии. Будет ли оно сохраняться при полярном преобразовании? Нет, оно будет сохраняться только лишь для коллинеарных точек (см. [19], стр. 118—119). Точное утверждение состоит в том, что *сложное отношение четырех точек, лежащих на прямой p, равно сложному отношению четырех точек, в которых поляры этих точек пересекают произвольную прямую, не проходящую через точку P — полюс прямой p.* Это целый рассказ, слишком длинный, чтобы быть изложенным здесь.

Любой, кто понял изложенные здесь идеи, будет готов воспринять аксиоматическую трактовку проективной геометрии, как в [19]. Там он вновь встретится с теоремами Дезарга, Паппа и Паскаля, взглянув на них с совершенно другой точки зрения, но будет иметь то преимущество, что узнает в них старых друзей.

Упражнения

1. Стереографическая проекция сохраняет углы.

2. На плоскости α существует окружность, обладающая тем свойством, что стереографическая проекция каждого большого круга на сфере α' является окружностью (или прямой), пересекающей эту окружность в диаметрально противоположных точках.

3. Пусть P_1' и P_2' — пара диаметрально противоположных точек на сфере α', а точки P_1 и P_2 получены из них при стереографической проекции. Какое преобразование плоскости переводит каждую такую точку P_1 в соответствующую ей точку P_2?

4. Получите с помощью стереографической проекции шесть окружностей, описанных в упражнении 3 § 8 гл. 5 из окружностей, вписанных в шесть граней куба.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Его ответ проскочил через мою голову, как вода через решето.

Ч. Л. Доджсон

ГЛАВА 1

§ 1

1. Высота, опущенная на сторону BC, делит ее длину a на две части: $b\cos\widehat{C}$ и $c\cos\widehat{B}$. Далее, произведите сложение (или вычитание).

2. Подставьте $\sin\widehat{A}=a/2R$, $\sin\widehat{B}=b/2R$, $\sin\widehat{C}=c/2R$ и упростите.

3. $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$, $\sin\widehat{C}=c/2R$.

4. $c=2p\sin\widehat{B}=pb/R$, $b=2q\sin\widehat{C}=qc/R$. Перемножьте эти выражения и упростите.

§ 2

1. Используйте теорему Чевы для случая $|BX|=|XC|$, $|CY|=|YA|$, $|AZ|=|ZB|$.

2. Используйте теорему Чевы для случая $|BX|=c\cos\widehat{B}$, $|XC|=b\cos\widehat{C}$ и т. д.

3. Пусть отрезок BB' пересекается с отрезком CC' в точке O, а отрезок OA пересекает отрезок $A'B'$ в точке A_1. Так как $\triangle A'B'C'\sim\triangle ABC$, то

$$\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|B'C'|}{|BC|}=\frac{|OB'|}{|OB|}=\frac{|A_1B'|}{|AB|}.$$

Поэтому точка A_1 совпадает с точкой A'.

4. Так как углы CXA и AXB являются дополнительными, то члены, содержащие их косинусы, сокращаются.

§ 3

1. Тупоугольный треугольник вписан в дугу, меньшую полуокружности. Две из высот пересекают противоположные стороны в точках, лежащих на их продолжениях.

2. Используя рисунок 7, нарисуйте отрезок $A'D$, равный и параллельный отрезку BB'; при этом $A'CDB'$ будет параллело-

граммом с центром в точке E, являющейся серединой отрезка CB'. Тогда стороны треугольника DAA' равны и параллельны трем медианам треугольника ABC и

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DAA'}}=\frac{S_{CAA'}}{S_{EAA'}}=\frac{|CA|}{|EA|}=\frac{4}{3}.$$

3. Пусть равные медианы BB' и CC' пересекаются в точке G, как на рисуике 8. Так как $|BG|=\frac{2}{3}|BB'|=\frac{2}{3}|CC'|=|CG|$, то треугольник GBC является равнобедренным и $\widehat{C'CB}=\widehat{B'BC}$. И по известному признаку $\triangle C'CB \cong \triangle B'BC$, откуда $\hat{B}=\hat{C}$.

4. Пусть BE и CF — равные высоты. Так как $b|BE|=2S_{ABC}=c|CF|$, то $b=c$.

5. В обозначениях рисунка 9, $|BL|/|LC|=c/b$ и т. д.

6. По теореме Стюарта (упражнение 4 § 2)

$$a\left(p^2+\frac{1}{4}a^2\right)=\frac{1}{2}a(b^2+c^2),$$

откуда

$$p=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

7. Используйте теорему Стюарта для случая $m=kc$, $n=kb$, $k=a/(b+c)$.

8. $12\sqrt{2}/7$

9. Добавляя высоту CF на рисунках 1 и 2, мы замечаем, что $\triangle BCJ \sim \triangle FCA$, откуда $|BC|/|CJ|=|FC|/|CA|$.

§ 4

1. В обозиачения рисунка 11 их радиусы равны x, y, z и, таким образом, $y+z=a$, $z+x=b$, $x+y=c$. Сложив их, получим $x+y+z=s$ и т. д.

2. Используйте теорему 1.42 и упражненне 3 § 1.

3. Используйте теорему Чевы для случая $|AY|=|AZ|=x$, $|BZ|=|BX|=y$, $|CX|=|CY|=z$.

4. Внутренняя и внещняя биссектрисы угла A образуют прямой угол.

5. $S_{ABC}=S_{I_aCA}+S_{I_aAB}-S_{I_aCB}=\frac{1}{2}(b+c-a)r_a=(s-a)r_a$. Обратно, так как $\triangle AI_aY_a \sim \triangle AIY$, то $r_a/r=s/(s-a)$.

6. $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\frac{s-c}{s}=1.$

§ 5

1. Так как $\widehat{BCM}=48^\circ=\widehat{CMB}$, а $\widehat{CBN}=12^\circ=\widehat{BNC}$, то $|BM|=|BC|=|CN|$. Заметьте, что центр вневписанной окружности, точка I, лежит на отрезке BM, а не на отрезке CN.

2. Если применить лемму 1.512 к треугольнику Боттемы, то она, коиечио, выполняется и в этой ситуации. Но если мы

попытаемся заменить слово «внутренний» на «внешний», мы увидим, что окружность BCN пересекает прямую BM в точке M', причем точки M и M' лежат по разные стороны от точки C. Таким образом, мы не сможем больше утверждать, что $|BM| \geqslant |BM'|$.

3. Равенство $|BM| = |CN|$ означает, что

$$ca\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right] = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right],$$

откуда

$$a(a+b+c)\{(a+b+c)(a^2+bc) + 2abc\}(b-c) = 0.$$

§ 6

1. Так как четырехугольник $BCEF$ может быть вписан в окружность, то $\widehat{AEF} = \widehat{B}$ и $\triangle AEF \sim \triangle ABC$. Аналогично и для других треугольников.

2. Хотя точка H все еще лежит на внутренней биссектрисе угла EDF, она станет лежать на внешних биссектрисах углов FED и DFE.

3. См. ответ к упражнению 2.

4. $\widehat{HAC} = 90° - \widehat{C}$, $\widehat{OAC} = 90° - \widehat{B}$.

§ 7

2. Из рисунка 14 мы видим, что $|OA'|^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Обозначая $|CA'| = n$, мы имеем $|AG| = 2n$ и $|AA'| = 3n$. Из упражнения 6 § 1

$$3n = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Применяя теорему Стюарта (упражнение 4 § 2) к треугольнику OAA', мы получаем

$$3n(|OG|^2 + 2n^2) = 2n|OA'|^2 + n|OA|^2 = n\left(2R^2 - \frac{1}{2}a^2 + R^2\right),$$

откуда

$$|OH|^2 = (3|OG|)^2 = 9R^2 - \frac{3}{2}a^2 - 18n^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

3. Предположим, для определенности, что $b > c$. (В противном случае переобозначим вершины B и C.) По теореме Пифагора $|BA|^2 - |BD|^2 = |AA'|^2 - |DA'|^2$, т. е.

$$c^2 - \left(\frac{a}{2} - |DA'|\right)^2 = \left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) - |DA'|^2$$

и поэтому $a|DA'| = \frac{1}{2}(b^2 - c^2)$.

4. Если прямая Эйлера параллельна отрезку BC, то она делит отрезок AD в отношении 2 : 1, так что

$$|OA'| = |AD|/3.$$

Теперь подставим вместо $|AD|$ и $|OA'|$ следующие выражения:

$$|AD| = b \sin \hat{C} = 2R \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C},$$

$$|OA'| = R \cos \hat{A} = R (\sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} - \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}).$$

§ 8

1. $|OA'| = \frac{1}{2}|AH| = |AK|$, а отрезок OA' параллелен отрезку AK.

2. По замечанию в конце § 6 отрезок EF перпендикулярен отрезку OA, параллельному отрезку $A'K$. Таким образом, диаметр $A'K$ делит пополам хорду EF и дугу EF.

3. Треугольник ABC является ортотреугольником треугольника $I_aI_bI_c$.

4. Пусть P — общая точка, а O_a, O_b, O_c — центры трех конгруэнтных окружностей PBC, PCA, PAB. Тогда четырехугольники PO_bAO_c и PO_aCO_b — ромбы. Следовательно, $\triangle PO_bO_a \cong \triangle O_bAC$ и $|AC| = |O_cO_a|$. Аналогично, $|BA| = |O_aO_b|$ и $|CB| = |O_bO_c|$. Следовательно, $\triangle ABC \cong \triangle O_aO_bO_c$ и, конечно, конгруэнтные треугольники имеют одинаковые радиусы описанных вокруг них окружностей. Так как отрезок AP перпендикулярен отрезку O_bO_c, который параллелен отрезку BC, то высотами треугольника ABC являются прямые AP, BP и CP. Поэтому точка P совпадает с точкой H ([11], стр. 75).

5. Так как отрезок DK перпендикулярен отрезку BC, а KA' — диаметр, то окружность пересекает сторону BC под углом

$$\widehat{DKA'} = \widehat{HKN} = \widehat{HAO} = |\hat{B} - \hat{C}|.$$

(см. упражнение 4 § 6).

§ 9

1. Продолжите отрезок CP до точки D так, чтобы образовался равносторонний треугольник BDP. Так как $\triangle DCB \sim \triangle PCQ$, то $|DB|/|PQ| = |DC|/|PC| = 1 + (|DP|/|PC|)$. Разделив на $|DB| = |PB| = |DP|$, мы выводим, что $1/|PQ| = (1/|PB|) + (1/|PC|)$.

2. Доказательство проведем методом «от противного». Предположим, что $|PD| < |CD|$. Тогда $\widehat{CPD} > 60°$, $\widehat{DPB} < 75°$, $|AD| < |PD| < |CD|$. Если, с другой стороны, $|PD| > |CD|$, то все неравенства меняются на противоположные. В любом случае четырехугольник не был бы квадратом. Следовательно, если четырехугольник $ABCD$ — квадрат, мы должны иметь $|PD| = |CD|$.

Или: постройте $\triangle BQC \cong \triangle APB$ (см. рис. 20). Тогда треугольник BPQ равносторонний, отрезок CQ (продолженный) перпендикулярен отрезку PB и делит его пополам; отсюда $|CP| = |CB| = |CD|$. Аналогично, $|DP| = |DC|$.

3. Обозначая различные углы через α, β, γ, δ, ε, как указано, и используя теорему синусов, мы находим

$$\frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\gamma}=\frac{\sin(\delta+\varepsilon)\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}=$$

$$=\frac{|CD|}{|PC|}\cdot\frac{|PC|}{|BC|}=\frac{|CD|}{|BC|}=\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|AB|}{|PA|}\cdot\frac{|PA|}{|AD|}=$$

$$=\frac{\sin(\gamma+\varepsilon)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\delta}=\frac{\sin(\gamma+\varepsilon)}{\sin\delta}.$$

откуда

$$\sin\gamma\cdot\sin(\gamma+\varepsilon)=\sin\delta\cdot\sin(\delta+\varepsilon),$$

$$\cos\varepsilon-\cos(2\gamma+\varepsilon)=\cos\varepsilon-\cos(2\delta+\varepsilon),$$

$$\gamma=\delta.$$

4. Пусть отрезок DF, параллельный отрезку BC, пересекает отрезок AB в точке F. Пусть отрезок CF пересекает отрезок BD в точке G. Так как треугольник BCG равносторонний, то $|BG|=|BC|$. Так как треугольник CBE равнобедренный, то $|BE|=|BC|$. Следовательно, треугольник BGE равнобедренный, $\widehat{BGE}=80°$, $\widehat{FGE}=40°$. Так как $\widehat{EFG}=40°$, то треугольник FEG равнобедренный и $|FE|=|FG|$. Но также $|DF|=|DG|$. Следовательно, $\triangle GDE\cong\triangle FDE$, прямая DE делит пополам угол FDG, а $\widehat{EDB}=30°$.

5. Концы равных дуг являются четырьмя вершинами правильного шестиугольника, двумя другими вершинами которого являются середины двух сторон равностороннего треугольника. Продолжая эти стороны на половину их длины, мы получаем больший равносторонний треугольник, три стороны которого содержат чередующиеся стороны шестиугольника. Теперь дальнейшая схема решения становится ясной.

ГЛАВА 2

§ 1

1. $-R^2$. Центр.
2. Концентричная ей окружность.
3. Длина любой касательной.
4. $|PT|^2-|PU|^2=|OU|^2-|OT|^2=|OQ|^2-|OT|^2=|QT|^2$.
5. $R(R-2r)=R^2-2rR=d^2\geqslant 0$. Но $R>0$. Следовательно, $R-2r\geqslant 0$.
6. Степень есть $d^2-R^2=-2rR$.
7. Написав P вместо A и A вместо X на рисунке 5, мы имеем

$$BC\,(PA^2+BA\times AC)=PC^2\cdot BA+PB^2\cdot AC,$$

т. е.

$$BC(PA^2+CA\times AB)+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB=0.$$

8. Разделите отрезок BC на три части точками U и V так, чтобы $BU = UV = VC$. Так как отрезок GU параллелен отрезку AB, и отрезок GV параллелен отрезку AC, то

$$GX\left(\frac{1}{GX}+\frac{1}{GY}+\frac{1}{GZ}\right)=1+\frac{VX}{VC}+\frac{UX}{UB}=$$

$$=1+\frac{VX-UX}{VC}=1+\frac{VU}{UV}=0.$$

9. 89 миль.

§ 2

1. Радикальная ось или, если окружности пересекаются, радикальная ось без общей хорды.

2. Все четыре середины лежат на радикальной оси.

3 Так как $\triangle PAB \sim \triangle AQB$, то $\widehat{PBA} = \widehat{ABQ}$, точка Q лежит на отрезке BP и $|PB|/|AB| = |AB|/|QB|$. Так как $\triangle AQB \sim \triangle ABR$, то $\widehat{BAQ} = \widehat{RAB}$. точка R лежит на отрезке AQ и $|AQ|/|AB| = |AB|/|AR|$. Так как

$$|PB| \cdot |QB| = |AB|^2 = |AQ| \cdot |AR|,$$

то точки A и B находятся на равном расстоянии от центра окружности PQR и эта окружность симметрична относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB. Поэтому все точки P', Q', R' лежат на этой окружности (и являются ее остальными точками пересечения с прямыми BR, AP', AP).

4. Записывая уравнение в форме $(x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+b^2-c$, мы видим, что оно представляет окружность, если $c < a^2+b^2$.

5. Нарисуйте окружность, центр которой не лежит на линии центров данных окружностей, так, чтобы она пересекала одну окружность в точках A и B, а другую — в точках C и D. Из точки пересечения прямых AB и CD проведите прямую, перпендикулярную прямой, проходящей через центры окружностей Это и есть радикальная ось.

§ 3

1. Пусть касательная в точке T пересекает хорду AB в точке O. Так как $\triangle OAT \sim \triangle OTB$ и $|OT| = |OP|$, то

$$\frac{|TA|}{|TB|}=\frac{|OP|}{|OB|}=\frac{|OA|}{|OP|}=\frac{|OP|-|OA|}{|OB|-|OP|}=\frac{|AP|}{|PB|}.$$

Теперь используйте теорему, обратную теореме 1.33.

2. Все касательные к окружности, проведенные из точки O, равны.

§ 4

1. На рисунке 32 точки D, E, F — середины отрезков HD', HE', HF'. Следовательно стороны треугольника $D'E'F'$ параллельны сторонам ортотреугольника DEF.

2. $\widehat{MLN} = \widehat{MLA} + \widehat{ALN} = \widehat{MBA} + \widehat{ACN} =$

$$= \frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}).$$

Аналогично $\widehat{NML} = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A})$ и $\widehat{LNM} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})$

§ 5

1. Нет.

2. Точка, диаметрально противоположная точке B

3. Вершины треугольника лежат на своих собственных прямых Симсона.

4. Проведите отрезки PB PC, C_1A_1, A_1B_1. Вписанные четырехугольники A_1PB_1C и A_1BC_1P дают

$$\widehat{A_1B_1P} = \widehat{A_1CP} = \widehat{BCP} = \widehat{C_1BP} = \widehat{C_1A_1P},$$

$$\widehat{PA_1B_1} = \widehat{PCB_1} = \widehat{PBC} = \widehat{PBA_1} = \widehat{PC_1A_1}$$

и $\triangle PA_1B_1 \sim \triangle PC_1A_1$

§ 6

1. Используйте теоремы 2.61 и 2.62 для случая $|AB| = |BC| = |AC|$.

2. Проведите диагонали AC, BD и примените теорему Птолемея к четырехугольникам $PABC$ и $PDAB$. Тогда $|PA| + |PC| = |PB|\sqrt{2}$ и $|PB| + |PD| = |PA|\sqrt{2}$.

3. Так как $\widehat{QPR} = \widehat{QAR} = \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$ и $\widehat{PRQ} = \widehat{PAQ} = \widehat{BAC}$, то $\triangle PQR \sim \triangle CBA$.

По теореме Птолемея $|AP| \cdot |RQ| + |AR| \cdot |QP| = |AQ| \cdot |RP|$. Поэтому $|AP| \cdot |AB| + |AR| \cdot |BC| = |AQ| \cdot |AC|$.

§ 7

1. Пусть OH — прямая Эйлера треугольника ABC и PP' — диаметр описанной вокруг него окружности. По теореме 2.72 прямые Симсона точек P и P' делят пополам отрезки HP и HP', скажем, в точках M и M' соответственно. Так как точки O, M, M', N — середины отрезков PP', HP, HP', OH (теорема 1.82), то точка N также является и серединой отрезка MM'. Так как $|NM| = \frac{1}{2}|OP| = \frac{1}{2}R$ есть радиус окружности девяти точек (теорема 1.81), то отрезок MM' — диаметр. Если прямые Симсона пересекаются в точке X, то $\widehat{MXM'} = 90°$ (теорема 2.71), и точка X лежит на окружности девяти точек.

2. В равностороннем треугольнике ортоцентр и центр описанной окружности совпадают.

§ 8

1. Доказательство в основном то же самое, что и для теоремы «о бабочке», за исключением нескольких изменений знака.

2. Пусть точка O — центр окружности, а X — точка в которой отрезок AP пересекает отрезок HT. Так как $\triangle AHX \sim \triangle ABP$ и $\triangle HTB \sim \triangle TOP$ то

$$\frac{|HX|}{|AH|} = \frac{|BP|}{|AB|} \quad \text{и} \quad \frac{|HT|}{|HB|} = \frac{|TO|}{|TP|}.$$

Следовательно.

$$\frac{|HX|}{|TH|} = \frac{|HX| \cdot |HT|}{|HT|^2} = \frac{|HX| \cdot |HT|}{|AH| \cdot |HB|} = \frac{|BP|}{|TP|} \frac{|TO|}{|AB|} = \frac{1}{2}.$$

3. Предположите, что $b > c$ (в противном случае переобозначьте вершины B и C). На отрезке BC возьмите точку X' так, чтобы $|BX'| = |XC| = s - c$ и поэтому

$$|XA'| = |A'X'| = \frac{1}{2}(b - c).$$

Постройте высоту AD. Из упражнения 3 § 7 $|DA'| = (b^2 - c^2)/2a$. Таким образом.

$$|DX'| = |DA'| + |A'X'| = \frac{b^2 - c^2}{2a} + \frac{b - c}{2a} = \frac{(b - c)\,s}{a}.$$

Так как $|AD| = 2S_{ABC}/a = 2rs/a$

$$\frac{|DX'|}{|AD|} = \frac{b - c}{2r} = \frac{|XA'|}{r} = \frac{|XA'|}{|IX|},$$

то $\triangle ADX' \sim \triangle IXA'$, и прямая AX' параллельна прямой IA'. Так как прямая IA' делит пополам отрезок XX', то она также делит пополам отрезок AX.

§ 9

1. Прямые UX, VY, WZ делят пополам углы равностороннего треугольника XYZ.

2. $\hat{A} = 108°$, $\hat{B} = \hat{C} = 36°$.

3. Описанная окружность делится на три равные дуги точками A, Y', Z', а дуга $Y'Z'$ делится на три равные части точками X и Y.

4. В обозначениях рисунка 43

$$\widehat{BZX} = 60° + \alpha \quad \text{и} \quad \widehat{BXC} = 120° + \alpha.$$

Отсюда

$$\frac{|ZX|}{\sin\beta} = \frac{|BX|}{\sin(60° + \alpha)}, \quad \frac{|BX|}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin(120° + \alpha)} = \frac{2R\sin 3\alpha}{\sin(60° - \alpha)}$$

и

$$|ZX| = \frac{2R \sin 3\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)} =$$

$$= \frac{4R \sin\alpha \cdot (3 - 4\sin^2\alpha) \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\cos 2\alpha - \cos 120^\circ} = 8R \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

5. Если взять сторону треугольника XYZ за единицу измерения, мы получаем

$$|BC| = |Y'Z'| = 3,$$
$$|BY'| = |CZ'| = \sqrt{3};$$

отсюда $\operatorname{tg} \widehat{CBX} = \operatorname{tg} \widehat{CBZ} = \sqrt{3}/3$, $\operatorname{tg} \widehat{ZBY'} = 1/\sqrt{3}$,

$$\widehat{CBX} = \widehat{ZBY'} = 30^\circ.$$

ГЛАВА 3

§ 1

1. На рисунке 45 $|PS| = |QR| = \frac{1}{2}|BD|$, поэтому $|PS| + |QR| = |BD|$. Аналогично, $|PQ| + |RS| = |AC|$.

2. Используйте результат упражнения 6 § 3 гл. 1 для треугольников ABC, CDA, BDX рисунка 49. (Интересно отметить, что в этой теореме можно считать «любой четырехугольник» даже пространственным четырехугольником, у которого пары прилежащих сторон лежат в четырех различных плоскостях.)

3. Используйте упражнеиие 2, приняв $|XY| = 0$.

4. Используйте теорему Птолемея 2.61.

§ 2

1. Заметьте, что касательные к окружности из внешней точки равны, и используйте теорему 3.22 для случая $s = a + c = b + d$.

2. а) 84, б) $4\sqrt{26}$.

3. $r = S_{ABC}/s = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$.

4. Из упражнения 5 § 4 гл. 1 и упражнения 3 § 1 гл. 1

$$r_a + r_b + r_c - r = S_{ABC}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right) =$$

$$= \frac{S_{ABC} \cdot abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{S_{ABC}} = 4R,$$

$$S_{I_aI_bI_c} = S_{I_aCB} + S_{I_bAC} + S_{I_cBA} + S_{ABC} =$$

$$= \frac{1}{2}(ar_a + br_b + cr_c) + sr =$$

$$= \frac{1}{2}s(r_a + r_b + r_c - r) - \frac{1}{2}(s-a)r_a -$$

$$- \frac{1}{2}(s-b)r_b - \frac{1}{2}(s-c)r_c + \frac{3}{2}sr =$$

$$= \frac{1}{2}s \cdot 4R - \frac{3}{2}S_{ABC} + \frac{3}{2}S_{ABC} = 2sR.$$

5. $K = \dfrac{abn}{4R} + \dfrac{c\,dn}{4R} = \dfrac{(ab + cd)\,n}{4R} = \dfrac{lmn}{4R}$.

6. $l = a$, $m = b$, $n = c$, $K = abc/4R$.

7. Примените упражнение 3 § 1 гл. 1 к двум треугольникам рисунка 51 и сложите результаты. Получите второе выражение для площади K, используя другую диагональ l вместо n. Перемножьте два выражения и используйте теорему Птолемея 2.61.

8. Сравните дуги, на которые окружность делится биссектрисами углов V и W.

9. Проведите через точку Г перпендикуляры к парам параллельных сторон прямоугольника и используйте теорему Пифагора четыре раза. (Отсюда следует, что точка P могла бы также лежать вне плоскости прямоугольника.)

10. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, вписаный в окружность с диаметром d, и пусть P — заданная точка на этой окружности. Из упражнения 9 § 3 гл. 1 произведение расстояний от точки P до прямых AB и CD равно

$$\frac{|PA| \cdot |PB|}{d} \cdot \frac{|PC| \cdot |PD|}{d} = \frac{|PB| \cdot |PC|}{d} \cdot \frac{|PD| \cdot |PA|}{d} =$$

$$= \frac{|PA| \cdot |PC|}{d} \cdot \frac{|PB| \cdot |PD|}{d}.$$

§ 3

1. Проведите диагонали CP и CQ в квадратах, построенных на первых двух сторонах BC и CA и постройте равнобедренный прямоугольный треугольник BAR, гипотенуза которого будет третьей стороной AB. Так как $\triangle PCB \sim \triangle CQA \sim \triangle BAR$, то можно применить теоремы 3.33 и 3.35.

2. а) PO_1, QO_2, RO_3 — серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC.

б) Пусть отрезки AO_1, BO_2, CO_3 пересекают стороны треугольника ABC в точках X, Y, Z. Тогда

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{S_{ABO_1}}{S_{CAO_1}} = \frac{c \sin(\hat{B} + 30°)}{b \sin(\hat{C} + 30°)};$$

также имеют место подобные выражения для $|CY|/|YA|$ и $|AZ|/|ZB|$, которые дают нам возможность применить теорему, обратную к теореме Чевы.

в) Так как $\triangle PCA \cong \triangle BCQ$, то мы получаем $|PA| = |BQ|$, и аналогично $|BQ| = |CR|$, а также $\widehat{PFC} = \widehat{PBC} = 60°$, аналогично

$$\widehat{CFQ} = 60°, \quad \widehat{QFA} = 60°$$

и, складывая, получаем, что $\widehat{PFA} = 180°$. Отсюда следует, что точка F лежит на прямой AP. Подобным же образом можно показать, что точка F лежит на прямой BQ, на прямой CR и эти три прямые образуют шесть углов по 60° в точке F ([17], стр. 42).

3. Используйте теорему, обратную к теореме Чевы, как в упражнении 2б).

4. Представьте себе, что рисунки 54 и 55 соединились вместе. Так как шесть треугольников BO_1N_1, CN_1O_1, CO_2N_2, AN_2O_2, AO_3N_3 и BN_3O_3 являются равносторонними, а другие шесть треугольников AN_3O_2, AO_3N_2, O_3BN_1, N_3BO_1, N_2O_1C, O_2N_1C прямо подобны треугольнику ABC и конгруэнтны друг к другу, то мы получаем

$$|N_3O_2| = |O_3N_2| = |BN_1| = |BO_1| = |O_1C| = |N_1C| = a/\sqrt{3},$$

$$|N_1O_3| = |O_1N_3| = |CN_2| = |CO_2| = |O_2A| = |N_2A| = b/\sqrt{3},$$

$$|N_2O_1| = |O_2N_1| = |AN_3| = |AO_3| = |O_3B| = |N_3B| = c/\sqrt{3}.$$

Так как

$$\widehat{O_1BO_3} = \widehat{O_1BN_1} + \widehat{N_1BO_3} = 60° + \hat{B}$$

и

$$\widehat{BO_3N_2} = \widehat{BO_3A} - \widehat{N_2O_3A} = 120° - \hat{B},$$

то четырехугольник $BO_1N_2O_3$ (противоположные стороны которого равны) является параллелограммом. Если через X обозначим середину отрезка O_2O_3, а через B' — середину отрезка CA (которая также является и серединой отрезка O_2N_2), то мы сможем вывести, что прямая XB' параллельна прямой O_3N_2 и прямой BO_1. Так как $|BO_1| = 2|XB'|$, то прямые O_1X и BB' пересекаются в точке G такой, что $|O_1G| = 2|GX|$ и $|BG| = 2|GB'|$. Но прямые O_1X и BB' являются медианами треугольника $O_1O_2O_3$ и треугольника ABC. Следовательно, для этих двух треугольников точка G является их общим центроидом. Заменяя параллелограмм $BO_1N_2O_3$ на параллелограмм $BN_1O_2N_3$, мы, аналогично, находим, что точка G является также центроидом треугольника $N_1N_2N_3$.

§ 4

1. Пусть AX, BY, CZ — биссектрисы внешних углов треугольника. Тогда

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

2. Пусть AX' и BY' — биссектрисы внутреиних углов, а CZ — биссектриса внешнего угла. Тогда

$$\frac{BX'}{CX'}\cdot\frac{CY'}{AY'}\cdot\frac{AZ}{BZ}=\left(-\frac{c}{b}\right)\left(-\frac{a}{c}\right)\frac{b}{a}=1.$$

§ 5

1. Если две прямые AC и BD параллельны, то из рассмотрения параллелограммов $ABCD$ и $CDFA$ следует, что $|BD|=|AE|$ и $|DF|=|CA|$, откуда, произведя сложение, мы получаем $|BF|=|CE|$. Таким образом, $EFBC$ — параллелограмм, а отрезок EF параллелен отрезку BC. Если, с другой стороиы, отрезки AC и BD не параллельны, пусть они пересекаются в точке O. Так как

$$|OA|/|OB|=|OE|/|OD| \quad \text{и} \quad |OC|/|OD|=|OA|/|OF|,$$

то мы получаем

$$|OB|\cdot|OE|=|OA|\cdot|OD|=|OC|\cdot|OF|,$$

откуда $|OE|/|OF|=|OC|/|OB|$.

2. Пусть C и F — точки пересечеиия, как на рисунках 58 и 59, и пусть L — точка, в которой прямая AB пересекает прямую DE. По теореме Паппа точка L лежит иа прямой MN, т. е. прямые AB, DE и NM конкурентны.

3. Согласно теореме Паппа прямая MN проходит через цеитр L параллелограмма и, таким образом, делит противоположные стороны на попарно равные отрезки.

4. 9 точек; 9 прямых; 3 прямые через каждую точку; по 3 точки на каждой прямой.

§ 6

1. Если два треугольника PQR и $P'Q'R'$ перспективны относительно точки O и при этом прямая QR параллельна прямой $Q'R'$, а прямая RP параллельна прямой $R'P'$, то мы имеем

$$|OQ|/|OQ'|=|OR|/|OR'|=|OP|/|OP'|.$$

Поэтому прямая PQ параллельна прямой $P'Q'$.

2. 10 точек; 10 прямых; 3 прямые через каждую точку; по 3 точки на каждой прямой.

3. a) треугольники OQR и $P'FE$,
b) треугольиики $OQ'R'$ и PFE,
c) треугольники ERR' и FQQ'.

4. Вершины каждого пятиугольника лежат на стороиах другого. Да, иа рисунке есть всего шесть таких пар взаимно вписанных пятиугольников. Одиой парой из оставшихся является $RPP'Q'D$, $EFQOR'$.

5. Пусть P — вершина треугольиика PQR, две другие вершины которого Q и R лежат на двух данных прямых e и f. Возьмите точку D на продолжении отрезка QR и точку E на продолжении отрезка RP. Пусть прямая DE пересекает отрезок QP (продолженный) в точке F. Для любой точки Q', лежащей иа прямой e, обозначим точку пересечения отрезка DQ'

с прямой f через R', а точку пересечения прямых ER' и EQ' через P'. Тогда PP' есть искомая прямая, проходящая через точку P. Если бы мы применили то же самое построение к параллельным прямым e и f, то мы получили бы прямую, проходящую через точку P и параллельную обеим прямым e и f (так как в противном случае это противоречило бы теореме 3.62).

§ 7

1. Продлите отрезки AB, CD, EF так, чтобы образовался треугольник UVW с точками A и B на стороне UV, точками C и D на стороне VW и точками E и F на стороне WU. Так как $|UE| = |AD| = |FW|$, мы имеем $|UF| = |EW| = |BC|$. Таким образом, $BCFU$ — параллелограмм и диагональ CF параллельна стороне AB. Чтобы рассмотреть центроиды, обозначим через X и Y точки, в которых диагональ BE пересекает диагонали CF и AD соответственно. Тогда $CDEX$ и $BCDY$ — параллелограммы, а их центры A' и F', которые являются серединами диагоналей DB и DX, лежат на прямой, параллельной прямым BX и AF. Так как

$$|AF| = |BX| = 2|F'A'|,$$

то прямые AA' и FF' пересекаются в точке G, так что $|FG| = 2|GF'|$ и $|AG| = 2|GA'|$. Но отрезки AA' и FF' — медианы треугольников ACE и BDF. Следовательно, у этих двух треугольников точка G — общий центроид.

2. Шестью способами.

§ 8

1. Пусть вершины A, B, C, D, E шестиугольника $ABCDEF$ лежат на окружности, которая вновь пересекает отрезок AF в точке F'. Три точки $L = AB \cdot DE$, $M = CD \cdot FA$ и $N = BC \cdot EF$ по условию коллинеарны, как на рисунке 64. Применяя теорему Паскаля к шестиугольнику $ABCDEF'$, мы видим, что прямая EF', так же как и прямая EF, проходит через точку $N = BC \cdot LM$. Следовательно, точка F' совпадает с точкой F.

2. На рисунке 65 показано, как теорема Паскаля применяется к вырожденному шестиугольнику $ABBDEE$. Требуемый результат можно получить подобным же образом, рассматривая шестиугольники $AABCCE$ или $ABCCEA$.

§ 9

1. Используйте вырожденный шестиугольник $BQCEPF$.
2. Прямые AC, BE, QF.
3. Используйте вырожденный шестиугольник $AZBXCY$.

ГЛАВА 4

§ 1

1. Рассматривая отрезок a двумя способами как вектор, переведите треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$ направо и в треугольник $A''B''C''$ налево. Соедините точки $AC \cdot A'B'$ и $AB \cdot A''C''$.

2. Мы получим мозаику из равносторонних треугольников, причем каждую вершину окружают шесть треугольников.

§ 2

1. Примените поворот на 45° вокруг центров этих квадратов.

2. а) Так как $|CX|/b = a/(a+b)$, то

$$\frac{|CX|}{|XA|} = \frac{|CX|}{b-|CX|} = \frac{a}{a+b-a} = \frac{a}{b}.$$

Аналогично, $|BY|/|YC| = a/b$. Также

$$\frac{|AH|}{|HB|} = \frac{S_{CAH}}{S_{CHB}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Так как теперь

$$\frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CX|}{|XA|} \cdot \frac{|AH|}{|HB|} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1,$$

то результат следует из теоремы Чевы.

б) Треугольник ABC является одной половиной параллелограмма $ABFC$, центр которого — точка M — середина стороны BC. Применяя результаты упражнения 1 к этому параллелограмму, мы получаем, что $|MO_2| = |MO_3|$, и эти прямые перпендикулярны, а также, что $|MO_1| = |MC|$, и эти прямые тоже перпендикулярны. Следовательно, поворот на 45° вокруг точки M переводит треугольник MO_1O_2 в треугольник MCO_3.

в) Дорисуйте чертеж, чтобы образовались прямоугольник $KCGC'$ и параллелограммы $DAJA'$ и $IBEB'$. Произведя положительные и отрицательные повороты на 45° вокруг точек O_1, O_2, O_3, мы получим, что шесть треугольников $B'IB$, $C'CG$, $CC'K$, $JA'A$, DAA', BEB' прямо конгруэнтны треугольнику ABC. Следовательно, точки U, V, W являются центрами рассмотренных прямоугольника и параллелограммов.

3. Рассмотрите результат поворота на 60° вокруг одной из вершин искомого равностороннего треугольника.

§ 3

1. Пусть B — точка пересечения одной из окружностей с образом другой при развороте вокруг точки A. Прямая AB и будет искомой прямой.

2. Пусть точка O — центр данной окружности, а r — ее радиус. Постройте две окружности с центрами в точках A и O радиусов r и $2r$, которые пересекаются в точках O_1 и O_2. Искомая прямая соединяет точку A с точкой P — серединой отрезка OO_1 или отрезка OO_2.

3. Рассмотрите разворот вокруг середины одной из диагоналей.

§ 4

1. В основании высоты, проведенной к стороне AB.

2. Пусть AB — основание треугольника. Третья вершина C должна лежать на прямой, параллельной отрезку AB, и мы должны минимизировать сумму $|AC|+|CB|$.

3. Ось симметрии соединяет точку A с серединой линии центров.

§ 6

1. Одним из способов является: (12, 0, 0), (7, 5, 0), (7, 0. 5), (2, 5, 5), (2, 1, 9). (11, 1, 0), (11, 0, 1), (6, 5, 1), (6, 0, 6).

2. Сначала нужно налить бальзам в сосуды емкостью 11 унций и 5 унций, затем отдать одному грабителю флакон с оставшимися в нем 8 унциями бальзама, что и является его долей добычи. Осталось разделить на равные части 16 унций бальзама с помощью сосудов емкостью 5, 11 и 13 унций, т. е. в ситуации [16; 13, 11, 5] решить задачу деления на равные части, которая может быть решена в четыре этапа.

3. Используя обозначения рисунка 19, мы находим, что четырехугольники AC_1PB_1 и $AB_1'P'C_1'$ подобны.

§ 7

1. Окружность, радиус которой равен половине радиуса данной окружности.

2. Постройте квадрат $CBED$ внешним образом на стороне BC. Прямые AD и AE пересекают сторону BC в двух вершинах искомого квадрата.

§ 8

1. Пусть треугольник $AB'C'$ — некоторое новое положение нашего подвижного треугольника ABC. Так как $\Delta ACC' \sim \Delta ABB$, то $\widehat{ACC'} = \widehat{ABB'} = \widehat{ABC}$.

2. Рассмотрев множество конгруэнтных отрезков, которые выписаны в ответе к упражнению 4 § 3 гл. 3, мы видим, что вращение на 120° вокруг точки G, которое переводит точку O_1 в точку O_2, точку O_2 — в точку O_3 и точку O_3 — в точку O_1, также переводит точку N_3 в точку N_2, точку N_2 в точку N_1 и точку N_1 в точку N_3. Конечно, существует подобие, которое переводит точки O_1, O_2, O_3 в точки N_1, N_2, N_3, соответственно. Однако это подобие является о б р а т н ы м, а не прямым и может быть представлено как сумма дилатации и симметрии ([17], стр. 116—117).

§ 9

1. $x' = x + a$, $y' = y + b$.
2. $x' = -x$, $y' = y$.
3. $x' = y$, $y' = x$.
4. $x' = -x$. $y' = -y$.
5. $x' = kx$, $y' = ky$.
6. $x' = -ky$. $y' = kx$.
7. $x' = x + a$ $y' = -y$.
8. $x' = kx$, $y' = -ky$.
9. $x' = x^3$, $y' = y$.
10. $x' = x$. $y' = \begin{cases} y, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -y, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

ГЛАВА 5

§ 1

1. $AC//BD$, $AC//DC$, $CA//BD$, $CA//DB$, $BD//AC$, $DB//AC$, $BD//CA$, $DB//CA$.

§ 2

1. $\{BA, DC\} = \dfrac{|BD|\cdot|AC|}{|BC|\cdot|AD|} = \dfrac{|AC|\cdot|BD|}{|AD|\cdot|BC|} = \{AB, CD\}$, и аналогично в остальных случаях.

2. а) 1; б) 2; в) 3; г) 1.

§ 3

1. Это будет фигура в форме цветка, состоящая из четырех конгруэнтных полуокружностей (построенных внешним образом на сторонах меньшего квадрата).

2. В тех случаях, когда точка O — центр вписанной окружности или центр вневписанной окружности.

3. а) Пусть окружность с центром в точке P и радиусом PO пересекается с окружностью инверсии ω в точках A и B. Центрами окружностей, проходящих через точку O, являются точки A и B. Эти окружности вновь пересекаются в точке, являющейся образом точки P.

б) Используя окружности, мы можем для любой точки P_1 построить точку P_2 такую, что $|OP_2| = 2|OP_1|$ и, аналогично, точку P_n такую, что $|OP_n| = n|OP_1|$. Если $|OP_1| > k/2n$, то $|OP_n| > k/2$, т. е. мы можем построить образ точки P_n — точку P_n', как и в предыдущем случае а). Тогда образ точки P_1, точка P_1', описывается равенством $|OP_1'| = n|OP_n'|$.

4. а) треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC;

б) треугольник $A'BC'$ подобен ортотреугольнику DEF (согласно соотношению 2.44);

в) треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику $I_aI_bI_c$ с вершинами в центрах вневписанных окружностей (согласно упражнению 4 § 4 гл. 1 и теореме 1.61).

5. $\left(\dfrac{k^2x}{x^2+y^2}, \dfrac{k^2y}{x^2+y^2}\right)$.

6. Постройте равнобедренный треугольник BO_1C с равными углами $\hat{A} + \hat{D} - 90°$ при вершинах B и C и равнобедренный треугольник CO_2A с равными углами $\hat{B} + \hat{E} - 90°$ при вершинах C и A. Окружности, проходящие через точку C с центрами в точках O_1 и O_2, пересекаются снова в искомом центре O. Радиус k определяется из соотношения

$$k^2 = \frac{|OA|\cdot|OB|\cdot|DE|}{|AB|}.$$

§ 4

1. Пусть точка O — центр окружности инверсии ω. Тогда

$$\Delta OAP \sim \Delta OPA' \quad \text{и} \quad |PA|/|PA'| = |OA|/|OP|.$$

2. Пусть BC — диаметр. Тогда $\Delta POB \sim \Delta COP'$ и

$$|PO|/|OB| = |CO|/|OP'|, \quad |OP| \cdot |OP'| = k^2.$$

3. Пусть P и Q — точки внутри данной окружности α. Инверсия относительно любой окружности с центром в точке P дает точки P_∞, Q' и окружность α'. Так как точка P_∞ лежит вне окружности α', то точка Q' тоже лежит вне ее. Две касательные, проведенные из точки Q' к окружности α', являясь двумя «окружностями», проходящими через точки P_∞ и Q', являются и образами двух окружностей, проходящих через точки P и Q и касающихся окружности α.

4. Используйте окружность инверсии, с центром в одной из трех точек касания. Фигура переходит в две параллельные прямые и окружность, касающуюся обеих прямых.

5. Инверсия относительно любой окружности с центром в точке A дает три точки B', C', D' так, что точка C' лежит на отрезке $B'D'$ тогда и только тогда, когда $AC \parallel BD$. По теореме 5.41 «неравенство треугольника» $|B'C'|+|C'D'| \geqslant |B'D'|$ эквивалентно

$$\frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|} + \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|} \geqslant \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|},$$

т. е. $|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| \geqslant |AC| \cdot |BD|$.

6. Если окружности ω и α пересекаются или касаются, то утверждение очевидно. В противном случае, пусть окружности ω и α описываются уравнениями $x^2 + y^2 = k^2$ и $x^2 + y^2 = ax$. Согласно упражнению 5 § 3 образ окружности α относительно окружности ω описывается уравнением

$$\left(\frac{k^2 x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{k^2 y}{x^2+y^2}\right)^2 = a\left(\frac{k^2 x}{x^2+y^2}\right),$$

т. е. $k^2 = ax$.

7. Парой пересекающихся окружностей. Вторая точка пересечения — точка P_∞.

§ 5

1. Построенная вами окружность должна проходить через точки пересечения окружности инверсии ω с окружностью, построенной на отрезке OA как на диаметре.

2. Это окружность $PP'Q$, где точка P' является образом точки P.

3. Это окружность PP_1P_2, где точки P_1 и P_2 являются образами точки P.

4. Их произведение равно k^4.

5. Инверсия относительно любой окружности с центром в точке O дает окружность α' и точку P' на окружности α'. Только одна прямая касается окружности α' в точке P'. И, на-

оборот, инверсия относительно любой окружности с центром в точке P дает прямую a и точку O', не лежащую на прямой a. Только одна прямая, проходящая через точку O', параллельна прямой a.

§ 6

1. Так как треугольник AB_1C_1 является конгруэнтным треугольнику ABC при симметрии относительно прямой AS, то

$$\widehat{BSC_1} = \widehat{SBA} - \widehat{SC_1B} = \hat{B} - \hat{C}.$$

2. Согласно упражнению 3 § 7 гл. 1, $|A'D| = (b^2 - c^2)/2a$. Мы только что видели, что $|A'S| = a(b-c)/2(b+c)$. Следовательно,

$$|A'S| \cdot |A'D| = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

§ 7

1. Уравнению $c + c' = 0$.

2. Пусть r — радиус серединной окружности двух касающихся окружностей с радиусами a и b. Инверсия относительно окружности, центром которой является точка касания, дает прямую на расстоянии $k^2/2r$ от нее, т. е. посередине между двумя параллельными прямыми, находящимися на расстояниях $k^2/2a$ и $k^2/2b$. Следовательно,

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

3. Мы получаем два ортогональных пучка параллельных прямых подобно двум пучкам прямых, описываемых уравнениями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$.

4. Возьмите точку O на серединной окружности. Тогда серединная окружность переходит при инверсии в прямую, а инверсия относительно нее переходит в симметрию.

5. Симметрия относительно прямой является частным случаем инверсии относительно окружности.

6. а) Если $AC \parallel BD$, то пусть γ — окружность, на которой лежат четыре заданные точки. Пусть α и β — две окружности, ортогональные к окружности γ, одна из которых проходит через точки A и C, а другая — через точки B и D. Окружности α и β пересекаются, скажем, в точках L и O. Инверсия относительно любой окружности с центром в точке L будет переводить окружности α и β в два диаметра окружности γ'; при этом параллелограмм $A'B'C'D'$ становится прямоугольником с центром в точке O'.

б) Если $AB \parallel CD$ или $AD \parallel BC$, определите окружности γ, α, β, как прежде. Но теперь окружности α и β не пересекаются. Пусть L и O — граничные точки соосного пучка $\alpha\beta$, другими словами, пусть L и O — точки, в которых окружность γ пересекает прямую, соединяющую центры окружностей α и β. При инверсии относительно любой окружности с центром L окружности α и β будут переходить в две окружности, имеющие один и тот

же центр O. Так как отрезки $A'C'$ и $B'D'$ (лежащие на одной прямой) являются диаметрами этих концентрических окружностей, то $A'B'C'D'$ — вырожденный параллелограмм.

в) Если точки A, B, C, D не все лежат на одной окружности, то они определяют четыре различные окружности ABC, ACD, ABD, BCD. Пусть μ — одна из серединных окружностей для окружностей ABC и ACD, а именно та, которая разбивает точки B и D (так что одна из этих точек лежит внутри окружности μ, а другая — вне нее или, если окружность μ окажется прямой, то точки B и D лежат по разные стороны от нее). Аналогично, пусть ν — срединная окружность окружностей ABD и BCD, разбивающая точки A и C. Окружности μ и ν пересекаются, скажем, в точках L и O. При инверсии относительно любой окружности ω с центром в точке L окружности ABC и ACD преобразуются в две конгруэнтные окружности $A'B'C'$ и $A'C'D'$, причем радикальная ось μ' разбивает точки B' и D' так, что

$$\overset{\frown}{A'B'C'} = \overset{\frown}{C'D'A'}.$$

Аналогично, при инверсии относительно окружности ω окружности ABD и BCD преобразуются в две конгруэнтные окружности $A'B'D'$ и $B'C'D'$, причем их радикальная ось ν' разбивает точки A' и C' так, что $\overset{\frown}{D'A'B'} = \overset{\frown}{B'C'D'}$. Следовательно, $A'B'C'D'$ — параллелограмм ([11], стр. 99).

В каждом случае пара точек L, O называется *якобианом* двух пар точек A, C и B, D (см. Coxeter, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **29** (1966), стр. 233).

7. Пусть диаметры данных окружностей, лежащие на их линии центров, обозначены через AB и CD так, чтобы $AC \parallel BD$. Пусть α и β обозначают окружности, диаметрами которых являются отрезки AD и BC. Пусть L и M — граничные точки соосного пучка $\alpha\beta$. Искомая серединная окружность имеет диаметр LM. (Так как при инверсии относительно этой окружности, ортогональной к окружностям α и β, точка A переходит в точку D, а точка B — в точку C.)

§ 8

1. Используйте упражнение 4 § 7.

2. Подставьте $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}$ в тригонометрическое тождество

$$\operatorname{cosec}\theta - \operatorname{ctg}\theta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta.$$

3. С точки зрения инверсивной геометрии такое расположение окружностей — это просто чертеж поризма Штейнера при $n = 4$. Поэтому три инверсных расстояния равны по $2\log(\sqrt{2}+1)$, а остальные двенадцать — нулю.

§ 9

1. Меньшее инверсное расстояние δ определяется из уравнения

$$\operatorname{ch}\delta = \left|\frac{1+1-(\sqrt{3}+1)^2}{2}\right| = \sqrt{3}+1.$$

Гиперболический косинус большего инверсного расстояния равен

$$\left|\frac{1+1-4(\sqrt{3}+1)^2}{2}\right| = 4\sqrt{3}+7 = 2\operatorname{ch}^2\delta - 1 = \operatorname{ch} 2\delta.$$

Нет; окружность между двумя данными окружностями радиуса 1 не может быть их серединной окружностью, потому что она несоосна с ними.

2. Окружности Содди являются частным случаем поризма Штейнера при $n = 3$; следовательно,

$$\operatorname{ch}\frac{\delta}{2} = \sec\frac{\pi}{3} = 2.$$

3. Квадрат отношения длин равен

$$\frac{c^2-(a+b)^2}{c^2-(a-b)^2} = \frac{c^2-a^2-b^2-2ab}{c^2-a^2-b^2+2ab} = \frac{\operatorname{ch}\delta - 1}{\operatorname{ch}\delta + 1} = \operatorname{th}^2\frac{\delta}{2}.$$

4. Первая часть утверждения ясна из чертежа. Для решения второй части используйте теорему 5.91 при $a = b$ и $c = 2p$:

$$\operatorname{ch} 2\delta = \frac{(2p)^2 - b^2 - b^2}{2b^2} = 2\left(\frac{p}{b}\right)^2 - 1.$$

5. $$2\operatorname{sh}^2\frac{\delta}{2} + 1 = \operatorname{ch}\delta = \frac{r^2+R^2-(R^2-2rR)}{2rR} = \frac{r}{2R} + 1.$$

6. Из рисунка 8 мы видим, что

$$|AH| = b\cos\hat{A}\operatorname{cosec}\hat{B} = 2R\cos\hat{A}.$$

Используя также упражнение 4 § 6 гл. 1, мы выводим, что

$$|OH|^2 = R^2 + (2R\cos\hat{A})^2 - 4R^2\cos\hat{A}\cos(\hat{B}-\hat{C}) =$$
$$= R^2(1 - 8\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}).$$

Так как $|ON| = \frac{1}{2}|OH|$, то из этого следует, что

$\cos\delta$ или $\operatorname{ch}\delta =$

$$= \left\{R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - R^2\left(\frac{1}{4} - 2\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}\right)\right\}\Big/R^2 =$$
$$= 1 + 2\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}$$

7. Если использовать упражнение 4 и принять, что указанная там прямая есть радикальная ось $x = 0$, то мы имеем, что $\operatorname{ch}\alpha = a/\sqrt{a^2-d^2}$ и $\operatorname{ch}\beta = b/\sqrt{b^2-d^2}$.

ГЛАВА 6

§ 1

1. Так как при инверсии относительно окружности ω окружность, построенная на отрезке OA как на диаметре, преобразуется в поляру a, то эти две окружности и прямая принадлежат одному пучку соосных окружностей, поэтому a — радикальная ось этих окружностей.

2. Поляры A и B перпендикулярны отрезкам OA и OB соответственно.

3. Так как образ любой фигуры при полярном преобразовании относительно окружности с центром в точке O подобен образу этой фигуры при полярном преобразовании относительно любой другой окружности с тем же центром O, то мы можем считать, что окружность ω есть окружность, вписанная в данный правильный многоугольник $ABC...$ Тогда полюсами сторон AB, BC, .. являются середины отрезков AB, BC, ..., а полярами вершин A, B, C, ... являются прямые, соединяющие смежные пары этих середин. Аналогично, если мы будем считать, что окружность ω является описанной окружностью, то образом многоугольника при полярном преобразовании будет многоугольник, полученный из прямых, касательных к этой окружности в каждой из его вершин.

4. Полюсы двух противоположных сторон прямоугольника равноудалены от точки O и лежат с ней на одной прямой. Это также справедливо и для других сторон, т. е. полюсы этих сторон равноудалены от точки O и лежат с ней на одной прямой. При этом рассмотренные прямые перпендикулярны. Таким образом, мы получаем четырехугольник, диагонали которого делят пополам друг друга под прямыми углами, т. е. ромб. И наоборот, две оси симметрии прямоугольника высекают конгруэнтные отрезки касательных, проведенных в его вершинах.

§ 2

1. Согласно теореме 6.21 полярная окружность делит пополам углы между описанной окружностью и окружностью девяти точек, причем те углы, которые стремятся к нулю, когда тупой угол треугольника стремится к 180°. Следовательно, используя обозначения из упражнения 6 § 9 гл. 5, мы получаем, что $\theta = \frac{1}{2}(180° - \delta)$.

§ 3

1. Относительно окружности α полярой точки B_2 является прямая b_2 и т. д. Относительно окружности β полюсом прямой B_0B_2 является точка C_1 и т. д.

2. Каждая из фигур, рассматриваемых в этом параграфе, симметрична относительно прямой OA: все, что производится над этой прямой, может быть продублировано под ней. Из рассмотрения рисунков 122 и 124 можно предположить существование другой оси симметрии, перпендикулярной к прямой OA, для эллипса и гиперболы (это будет установлено в § 6).

3. Из рисунка 123 мы видим, что каждая касательная t параболы является полярой точки T на окружности α. Основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую t, является образом точки T при инверсии относительно окружности ω. Все полученные таким образом точки, являясь образами точек, лежащих на окружности α (проходящей через точку O) лежат на одной прямой.

4. Из рисунка 124 мы видим, что асимптота u, являясь полярой точки U, перпендикулярна стороне OU прямоугольного треугольника OAU. Следовательно, этот треугольник имеет угол θ при вершине A и

$$\sec\theta = \frac{|OA|}{|AU|} = \frac{|OA|}{r} = \varepsilon.$$

Для прямоугольной гиперболы $\theta = 45°$, а $\varepsilon = \sqrt{2}$.

5. Комета с параболической или гиперболической орбитой никогда не вернется в окрестность Солнца. Однако нет убедительных доказательств, что такую комету видели когда-либо. Хотя участок орбиты, который мы можем наблюдать, иногда похож на гиперболу из-за возмущений, создаваемых планетами (особенно такими массивными, как Юпитер), а некоторые эллиптические орбиты так вытянуты, что их нельзя отличить от парабол, все известные кометы (включая и «непериодические», которые ненадолго посещают нас и никогда снова не видны) обычно считаются членами Солнечной системы. Их скорость относительно Солнца никогда не бывает достаточно велика, чтобы дать им возможность уйти во «внешнее пространство», где притяжение другой звезды могло бы оказаться более существенным, чем притяжение Солнца.

§ 4

1. $x^2 + y^2 = (l - \varepsilon x)^2$.

2. Серединой отрезка между точками $x_1 = l/(\varepsilon + 1)$ и $x_2 = l/(\varepsilon - 1)$ является точка $x = -\varepsilon a$. Таким образом, новым уравнением будет

$$(x - \varepsilon a)^2 + y^2 = [l - \varepsilon (x - \varepsilon a)]^2 = (a - \varepsilon x)^2,$$

или

$$(1 - \varepsilon^2) x^2 + y^2 = (1 - \varepsilon^2) a^2 = la = \pm b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причем знак плюс или минус берется в соответствии с тем $\varepsilon < 1$ или $\varepsilon > 1$. Так как в уравнение входят только четные степени переменных x и y, то эллипс и гипербола симметричны относительно обеих координатных осей.

§ 5

1. Если два треугольника перспективны относительно точки, то они перспективны относительно прямой. Если два треугольника перспективны относительно прямой, то они перспективны относительно точки.

2. Если шесть вершин шестиугольника лежат, чередуясь, на двух прямых, то три пары противоположных сторон пересекаются в коллинеарных точках. Если шесть сторон шестиугольника проходят, чередуясь, через две точки, то три его диагонали конкурентны ([19], стр. 38, 90).

3. Они являются перпендикулярными прямыми, проходящими через ее центр.

4. Так как прямая l_∞ является полярой точки O, то любая точка на бесконечности конического сечения является полюсом (относительно окружности ω) касательной к окружности α, которая проходит через точку O. Следовательно, число точек на бесконечности конического сечения будет 0, 1 или 2 в зависимости от того, находится точка O внутри окружности α, на ней или вне нее.

5. Используя обозначения рисунка 124, можно сказать, что прямая OU касается окружности α в точке U. Поэтому одной из точек на бесконечности для гиперболы является точка касания касательной u и, конечно, другой точкой касания является точка касания прямой v.

6. Так как директриса является полярой точки A, то любая точка, лежащая на ней, является полюсом некоторого диаметра окружности α, и касательные к параболе из такой точки являются полярами двух концов этого диаметра. Так как эти диаметрально противоположные точки окружности α стягивают прямой угол в точке O, то их поляры перпендикулярны.

7. Каждая из трех «диагональных точек» в свою очередь может быть рассмотрена как точка P в теореме 6.51, и тогда две другие лежат на ее поляре.

§ 6

1. $|OP| + |O_1P| = \varepsilon |PK| + \varepsilon |K_1P| = \varepsilon |K_1K|$.

Отсюда она равна произведению ε на расстояние между директрисами.

2. Если точка P лежит на левой ветви этой гиперболы, как на рисунке 131, то

$$|OP| - |O_1P| = \varepsilon |PK| - \varepsilon |PK_1| = -\varepsilon |KK_1|.$$

Для первой ветви знак будет обратным

3. Эта окружность является образом окружности α при инверсии отиосительно окружности ω (сравните с упражнением 3 § 3).

§ 7

1. Стереографическая проекция является частным случаем инверсии.

2. Плоскость, проходящая перпендикулярно к диаметру OA через его середиину (см. рис. 134), пересекает сферу α' вдоль особого большого круга, который мы, естественно, назовем экватором. Каждый другой большой круг пересекает его в паре диаметрально противоположных точек. Характерной особенностью экватора является то, что его диаметры проектируются в диа-

метры (окружности на плоскости α с центром в точке A и радиусом $2k$).

3. Мы можем рассмотреть точки P_1' и P_2' как точки пересечения двух больших кругов на сфере α', один из которых проходит через точки O и A. Таким образом, точки P_1 и P_2 на плоскости α являются точками пересечения прямой, проходящей через точку A, с окружностью, проходящей через две диаметрально противоположные точки, скажем, Q_1 и Q_2, «проективного экватора» (с центром в точке A и радиусом $2k$). Так как

$$AP_1 \times AP_2 = AQ_1 \times AQ_2 = -(2k)^2,$$

то точки P_1 и P_2 переводятся друг в друга при помощи *антиинверсии*: суммы инверсии относительно проективного экватора и разворота вокруг его центра A.

4. Пусть α' — сфера, касающаяся двенадцати ребер куба (в их серединах), а точка O — одна из точек пересечения сферы α с прямой, соединяющей две противоположные вершины. (Передвигая точку O к одной из точек пересечения сферы α' с прямой, соединяющей центры двух противоположных граней, мы получим симметричный чертеж для поризма Штейнера при $n = 4$.)

БИБЛИОГРАФИЯ

1*. Аргунов Б. И. и Скорняков Л. А., Конфигурационные теоремы, М., Гостехиздат, 1957.

2*. Бакельман И. Я., Инверсия, М., «Наука», 1966.

3. Белл Е. Т. (Bell E. T.), Development of Mathematics, New York, McGraw Hill, 1945.

4. Белл Е. Т. (Bell E. T.), Men of Mathematics, New York, Simon and Schuster, 1937.

5. Болл У. У. Р. (Ball W. W. R.), Mathematical Recreations and Essays (11th ed.), London, Macmillan, 1939.

6*. Болтянский В. Г., Огибающая, М., Физматгиз, 1961.

7*. Васильев Н. Б. и Гутенмахер В. Л., Прямые и кривые, М., «Наука», 1978.

8. ван дер Варден В. Л., Пробуждающаяся наука, М., Физматгиз, 1959.

9*. Вольберг О. А., Основные идеи проективной геометрии, М. — Л., Учпедгиз, 1949.

10. Гильберт Д. и Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, М. — Л., Гостехиздат, 1951.

11. Джонсон Р. А. (Johnson R. A.), Advanced Euclidean Geometry, New York, Dover, 1960.

12*. Дорфман А. Г. Оптика конических сечений, М., Физматгиз, 1959.

13. Дюрель С. В. (Durell C. V.), A Course of Plane Geometry for Advanced Students, Part I, II, London, Macmillan, 1909—10.

14*. Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, М., Учпедгиз, 1962.

15*. Зетель С. И., Геометрия циркуля и геомегрия линейки, М., Учпедгиз, 1957.

16. Казаринов Н. Д. (Kazarinoff N. D.), Geometric Inequalities, New Mathematical Library, vol. 4, Random House, New York and the L. W. Singer Co., Syracuse, 1961.

17. Кокстер Г. С М., Введение в геометрию. М., «Наука», 1966.

18*. Кокстер Х. С. М., Действительная проективнаи плоскость, М., Физматгиз, 1959.

19. Коксетер Г. С. М.*) (Coxeter H. S. M.), Projective Geometry, New York, Blaisdell, 1964.

20. Коксетер Г. С. М. (Coxeter H. S. M.), Regular Polytopes (2nd ed.), New York, Macmillan, 1963.

21. Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика? М., «Просвещение», 1967.

22. Курт Н. А. (Court N. A.), College Geometry (2nd ed.), New York, Barnes and Noble, 1952.

23. Лэмб Г. (Lamb H.), Statics, Cambridge University Press, 1916.

24. Локвуд Е. Х. (Lockwood E. H.), A Book of Curves, Cambridge University Press, 1961.

25*. Маркушевич А. И., Замечательные кривые, М., «Наука», 1978.

26*. Моиз Э. Э. и Даунс Ф. Л., Геометрия, М., «Просвещение», 1972.

27. О'Бейрн Т. Х. (O'Beirne T. H.), Puzzles and Paradoxes, London, Oxford University Press, 1965.

28. Оре О., Графы и их применение, М., «Мир», 1965.

29. Перфект Г. (Perfect H.), Topics in Geometry, London, Pergamon, 1963.

30. Петерсен Ю., Методы и теория решения геометрических задач на построение с приложением более 400 задач, Харьков, книжный магазин Кервнли и К°, 1883.

31. Пидо Д. (Pedoe D.), Circles, London, Pergamon, 1963.

32*. Розенфельд Б. А. и Сергеева Н. Д., Стереографическая проекция, М., «Наука», 1973.

33*. Скопец З. А., Конические сечения, Энциклопедии элементарной математики, кн. V, М., «Наука», 1966.

34. Смогоржевскнй А. С., Линейка в геометрических построениях, М., Гостехиздат, 1957.

35*. Смогоржевский А. С., О геометрии Лобачевского, М., Гостехиздат, 1956.

36. Фейеш Тот Л. (Fejes Tóth L.), Regular Figures, Oxford (England), Pergamon, 1964.

---

*) По поводу различий написаиии имени Г. С. М. Коксетера в [17], [18], [19], [20] см. «От редактора русского перевода», помещенное в начале киигн, — *Прим. перев.*

37. Фордер Г Г (Forder H. G.), The Calculus of Extension. New York, Chelsea, 1960.

38. Фордер Г. Г. (Forder H. G.), Geometry, London, Hutchinson, 1960.

39. Фордер Г. Г. (Forder H. G.), Higher Course Geometry, Cambridge University Press, 1949.

40. Харди Г. Х. (Hardy G. H.), A Mathematician's Apology. Cambridge University Press, 1940.

41. Шерватов В. Г., Гиперболические функции, М. Гостехиздат, 1958.

42*. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, геометрия (планиметрия), М., Гостехиздат, 1952.

43. Яглом И. М., Геометрические преобразования, т. 1, 2, М.. Гостехиздат, 1955—1956.

44*. Яглом И. М., Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, М., «Наука», 1969.

45*. Яглом И. М., Окружности. Энциклопедия элементарной математики, кн. IV, М., Физматгиз, 1963.

46*. Яглом И. М. и Атанасян Л. С., Геометрические преобразования. Энциклопедия элементариой математики, кн. IV, М., Физматгиз, 1963.

СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В КНИГЕ

«Когда я употребляю какое-нибудь слово, — сказал Шалтай-Болтай довольно презрительно, — оно означает только то, что я хочу, чтобы оно означало, — ни больше, ни меньше.»

Ч. Л. Доджсон

Автополярный треугольник. Треугольник, вершины которого являются полюсами соответственно противоположных сторон.

Антиподные точки на сфере. Концы диаметра.

Асимптота к кривой. Касательная, точка касания которой находится в бесконечности.

Бесконечно удаленная прямая. Идеальная прямая; каждому пучку параллельных прямых соответствует точка этой прямой, которая принимается за точку пересечения прямых этого пучка.

Бесконечно удаленная точка. Идеальная точка, которая принимается за общую точку всех прямых в круговой плоскости, рассматриваемых как окружности бесконечного радиуса.

Большой круг на сфере. Сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы.

Вектор. См. *параллельный перенос.*

Вневписанная окружность треугольника. Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.

Вписанный четырехугольник. Выпуклый четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности (при этом противоположные углы являются дополнительными).

Высота треугольника. Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону (или ее продолжение), заключенный между ними.

Гипербола. Коническое сечение с эксцентриситетом $\varepsilon > 1$; при этом точка O находится вне окружности α (см. определение *конического сечения*).

Асимптоты гиперболы. Поляры точек касания с окружностью α касательных, проведенных через точку O.

Гномоническая проекция. Проекция сферы из ее центра на касательную к ней плоскость.

Граничные точки пучка окружностей, задаваемого двумя окружностями α *и* β. Две точки, принадлежащие одновременно всем окружностям, ортогональным как окружности α, так и окружности β.

Дилатация. Преобразование, переводящее каждую прямую в параллельную ей прямую. Подобие, сохраняющее направления прямых.

Директриса конического сечения. Поляра точки A относительно окружности ω (см. определение *конического сечения*).

Изометрия. Преобразование, сохраняющее длины. Движение.

Инверсное расстояние между двумя непересекающимися окружностями. Натуральный логарифм отношения радиусов концентрических окружностей, в которые данные окружности могут быть переведены при помощи инверсии.

Инверсор Поселье. Шарнирный инструмент, с помощью которого можно произвести инверсию заданного множества точек.

Коллинеарность множества точек. Существование прямой, на которой находятся все точки этого множества.

Коллинеация. Преобразование, переводящее прямые в прямые.

Коническое сечение. Полярное преобразование окружности α (радиуса r с центром в точке A) относительно окружности ω радиуса k с центром в точке O).

Конгруэнтность. См. изометрия.

Конкурентность прямых. Существование точки, через которую все эти прямые проходят.

Круговая плоскость. Евклидова плоскость, дополненная одной идеальной точкой (см. *бесконечно удаленная точка*).

Медиана треугольника. Чевиана, проходящая через середину стороны.

Многоугольник. Замкнутая ломаная на плоскости.

n-угольник. Многоугольник с n вершинам и n сторонами.

Оболочка. Множество всех касательных к кривой.

Образ точки P при инверсии относительно окружности ω. Вторая точка пересечения двух окружностей, проходящих через точку P ортогонально окружности ω.

Образ точки P при симметрии относительно прямой l. Вторая точка пересечения двух окружностей с центрами на прямой l, проходящих через точку P.

Ортогональные окружности. Две пересекающиеся окружности, касательные к которым в точках пересечения ортогональны.

Ортотреугольник треугольника ABC. Треугольник, вершины которого являются основаниями высот треугольника ABC.

Ортоцентр треугольника. Точка пересечения его высот.

Парабола. Коническое сечение с эксцентриситетом $\varepsilon = 1$; при этом точка O лежит на окружности α (см. определение *конического сечения*).

Параллелограмм Вариньона данного четырехугольника. Параллелограмм, образованный отрезками, соединяющими середины смежных сторон четырехугольника.

Параллельный перенос. Преобразование, при котором направленные отрезки, соединяющие точки с их образами, имеют одинаковые длины и направления. Иначе, дилатация, не имеющая неподвижных точек.

Педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC. Треугольник, вершинами которого являются основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника ABC (или их продолжения).

Поворот. Преобразование, являющееся результатом вращения всей плоскости вокруг точки на этой плоскости на заданный угол.

Подобие. Преобразование, сохраняющее отношение расстояний.

Полюс прямой p относительно окружности ω с центром в точке O. Образ основания перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую p при инверсии относительно окружности ω, или, иначе, точка пересечения поляр любых двух точек, лежащих на прямой p.

Поляра точки P относительно окружности ω. Прямая, соединяющая точку пересечения прямых AB и DE с точкой пересечения прямых AE и BD, где AD и BE — две хорды окружности ω, высекаемые двумя прямыми, проходящими через точку P.

Полярная окружность. Окружность, при инверсии относительно которой вершины тупоугольного треугольника переходят в осиования высот, или, иначе, окружность, относительно которой данный тупоугольный треугольник является автополярным.

Полярное преобразование. Преобразование точек в их поляры, а прямых в их полюсы.

Правильный многоугольник. Многоугольник, центр которого расположен на равном расстоянии R от всех его вершин и равном расстоянии r от всех его сторон.

Преобразование плоскости. Отображение плоскости на себя такое, что каждая точка P имеет единственный образ — точку P', а каждой точке Q' соответствует единственный прообраз — точка Q.

Проективная плоскость. Евклидова плоскость, дополненная идеальной прямой (см. *бесконечно удаленная прямая*).

Произведение двух преобразований. Результат применения сначала первого преобразования, а потом второго.

Пучок окружностей αβ. Совокупность окружностей, ортогональных двум различным окружностям, которые в свою очередь ортогональны окружностям α и β.

Пучок прямых. Совокупность всех прямых (на одной плоскости), проходящих через одну точку.

Прямая Паскаля шестиугольника, вершины которого лежат на окружности или любом другом коническом сечении. Прямая, содержащая три точки пересечения пар противоположных сторон этого шестиугольника.

Прямая Симсона точки P, лежащей на окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Прямая, в которую вырождается педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC.

Прямая Эйлера треугольника ABC. Прямая, на которой лежат ортоцентр, центроид и центр описанной окружности треугольника ABC.

Прямое подобие. Коллинеация, при которой сохраняются углы и их знаки.

Радикальная ось двух неконцентрических окружностей. Множество всех точек, имеющих одинаковую степень относительно этих окружностей.

Радикальный центр трех окружностей с неколлинеарными центрами. Общая точка пересечения всех трех радикальных осей, каждая из которых является радикальной осью двух из этих трех окружностей.

Разбиение $AC \,//\, BD$ (для любых четырех различных точек, лежащих в одной плоскости). Любая окружность, проходящая через точки A и C пересекает любую окружность, проходящую через точки B и D.

Разворот. Поворот на 180°, или, иначе, центральная симметрия.

Серединная окружность или окружность антиподобия. Окружность, при инверсии относительно которой две данные окружности переходят одна в другую.

Серединный треугольник треугольника ABC. Треугольник, образованный отрезками, соединяющими середины сторон треугольника.

Симметрия относительно прямой l. Преобразование, которое переводит каждую точку плоскости в ее образ при симметрии отражения относительно этой прямой.

Сложное отношение четырех точек $\{AB, CD\} = (AC/BC)/(AD/BD)$.

Соосные окружности. Семейство окружностей, любая пара из которых определяет одну и ту же радикальную ось, или, иначе, окружности, ортогональные к двум данным.

Сопряженные прямые. Прямая a и любая прямая, проходящая через полюс прямой a.

Сопряженные точки. Точка A и любая точка, лежащая на поляре точки A.

Спиральное подобие (или *дилатационный поворот*). Произведение поворота и дилатации или наоборот.

Степень точки P относительно окружности. Число $d^2 - R^2$, где d — расстояние от точки P до центра окружности, а R — радиус окружности.

Стереографическая проекция. Проекция из точки O сферы, проходящей через эту точку на плоскость, касающуюся сферы в точке, антиподной к точке O.

Топология. Геометрия, рассматривающая взаимно однозначные и взаимно непрерывные преобразования.

Точка Жергона треугольника ABC. Точка пересечения чевиан, проходящих через точки касания вписанной окружности со сторонами этого треугольника.

Треугольник Наполеона для треугольника ABC.

Внутренний. Треугольник, вершины которого являются центрами равносторонних треугольников, построенных внутрь на сторонах треугольника.

Внешний. Треугольник, вершины которого являются центрами равносторонних треугольников, построенных снаружи на сторонах треугольника.

Фокус конического сечения. Центр O окружности, относительно которой производится преобразование (см. определение *конического сечения*).

Центральная дилатация. Дилатация, составляющая одну из точек неподвижной. Гомотетия.

Центральное коническое сечение. Эллипс или гипербола.

Центроид треугольника. Точка пересечения медиан.

Чевиана. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной ей стороне (или ее продолжении).

Четырехсторонник. См. *четырехугольник.*

Четырехугольник. Многоугольник с четырьмя вершинами и четырьмя сторонами.

Выпуклый четырехугольник. Обе диагонали лежат внутри него.

Четырехугольник с входящим углом. Одна из диагоналей лежит внутри, а другая вне него.

Скрещенный четырехугольник. Обе диагонали лежат вне него.

Эксцентриситет конического сечения. $\varepsilon = |OA|/r$ (см. определение конического сечения).

Эллипс. Коническое сечение с эксцентриситетом $\varepsilon < 1$, при этом точка O находится внутри окружности α (см. определение *конического сечения*).

УКАЗАТЕЛЬ

Автополярный треугольник 169, 179
Антиинверсия 211
Аргунов В. И. 212
Артоболевский И. И. 135
Архимед из Сиракуз 17, 74
Асимптоты гиперболы 171—173, 179
Атанасян Л. С. 213

Бакельман И. Я. 212
Белл Е. Т. 13, 43, 60, 74, 212
Бесконечно удаленная прямая 176
— — точка 139, 176, 214
Биван Б. 33
Биссектриса угла внешняя 26
— — внутренняя 19
Болл У. У. Р. 212
Болтянский В. Г. 212
Больаи Я. 156
Боттема О. 26
Брахмагупта 73, 74
Брекенридж В. 94
Брианшон Ш. Ж. 95
Брунеллески Ф. 87

Ван дер Варден Б. Л. 74, 212
Вариньон П. 67
Васильев Н. Б. 212
Вектор 100, 214
Взаимная простота 115
Вольберг О. А. 212
Высота 19

Гарднер М. 25
Гаусс К. Ф. 156
Геометрия гиперболическая 156
— инверсивная 108, 163
— неевклидова 156
— проективная 65, 168
Герон из Александрии 74
Гильберт Д. 212
Гипербола 171
— прямоугольная 173
Гиперболическая геометрия 156
Гиперболические функции 157
Гипоциклоида 58
Гномоническая проекция 183, 185, 214
Гомеоморфизм 124
Гомотетия 17, 90
Горнер В. Г. 60
Граничные точки 148
Грейтцер С. Л. 93
Гутенмахер В. Л. 212

Даунс Ф. Л. 213
Декартовы координаты 43
Дельтоида 58
Джильберт Г. 25
Джонсон Р. А. 60, 212
Диаметрально противоположные точки 185
Дюрель С. В. 212

Евклид из Александрии 13, 39, 174
e 153

Задача о трех кувшинах 110
— Фаньяно 108
Зетель С. И. 212

Идеальная прямая 183
— точка 183
Инверсия 132 и далее
—, инверсивное определение 143
— относительно сферы 183
Инверсное расстояние 152, 215
Инверсор Поселье 135
Инцидентность 164
Искусственный спутник 183

Казаринов Н. Д. 108, 212
Квадрат 82, 119
Кейси Д. 35, 138
Кеплер И. 39, 172
Коксетер Г. С. М. 93, 212, 213
Коллинеарность 65
Комета 172, 209
Конгруэнтность 99
Коническое сечение 163, 170, 210, 215
— — центральное 179
Конкурентность 65
Конфигурация 155, 165
— двойственная 165
Кон-Фоссен С. 212
Коэффициент подобия 116
Круговая плоскость 138, 139, 183, 184
Курант Р. 108, 213
Курт Н. А. 213

Лагранж Ж. 79
Лаплас П. 79
Лейбниц Г. В. 92
Лемус С. Л. 24
Линейные преобразования 124, 158
Липкин Л. 135
Лобачевский Н. И. 156
Логарифм (натуральный) 153
Локвуд Е. Х. 135, 213
Лэмб Г. 71, 213

Магнус Л. И. 132
Мак-Доннел Д. 25
Маклорен К. 94
Маркушевич А. И. 213
Медиана 18
Микель А. 77
Многоугольник 65
Мозаика 201
Моиз Э. Э. 213

Наложение карт 123
Наполеон Бонапарт 79
Нараньенгар М. Т. 61
Нейберг Ж. 35
Неподвижная точка 121
Ньютон И. 42, 92, 172

Оболочка 166
Образ (при инверсии) окружности 139
— прямой 134
— точки 133, 184, 215
— треугольника 137
Окружности Содди 140, 161, 207
Окружность 39, 132
— Аполлония 140
— вневписанная 22
— вписанная 20
— девяти точек 31—33, 145, 161
— инверсии 133
— описанная 17, 41, 137
— Эйлера 33
Оппенгейм А. 36
Орбита 172
Оре О. 213
Ортогональность 141
Ортотреугольник 19, 27, 108
Ортоцентрический четырехугольник 53, 147
Отображение 99
Отражение 108

Палиндром 79
Папп из Александрии 84, 174, 179
Парабола 171, 179, 215
Параллелограмм 67
— Вариньона 67
— вырожденный 100, 151, 206
Параллельный перенос 100, 215
Паскаль Б. 92, 176
Педальная точка 34
Педальный треугольник 34, 53, 215
Перельман А. И. 110

Перспективность относительно прямой 86
— — точки 86
Перспективные треугольники 64, 86
Перфект Г. 213
Петард Г. 127
Петерсен Ю. 123, 213
Пидо Д. 213
Планеты 39, 172
Площадь 16
— отрицательная 67
— положительная 67
Поворот 100, 102, 119
Подобие 99, 116, 215
— прямое 118
Подобные треугольники 47, 77
Полюс 163
Поляра 163, 183
Полярная окружность треугольника 169, 216
Полярное преобразование 163, 216
Понселе Ж. В. 32
Поризм Штейнера 154, 206, 211
Поселье А. 135
Правильный многоугольник 216
Преобразование 99 и далее
— линейное 124
— непрерывное 124
Приведение к абсурду 26
Принцип двойственности 165
Проективная геометрия 65, 168
— плоскость 163, 176, 183, 185
Проекция гномоническая 183, 185, 214
— стереографическая 183, 185, 217
Прокрустово растяжение 125
Прямая Паскаля 93, 216
— Симсона 53—55, 57, 78
— Эйлера 30, 170, 190, 194, 216
Пучок окружностей 48, 216
Пятиугольник 64, 66, 97

Равносторонний треугольник 38, 78, 194
Радикальная ось 46, 97, 151, 193, 216
Радикальный центр 48, 51
Разбиение 127, 216
Разворот 33, 99, 105, 118
Роббинс Г. 108, 213
Розенфельд Б. А. 213
Рычажный механизм 135

Самосопряженная прямая 167
— точка 167
Сергеева Н. Д. 213
Серединная окружность 150
Серединный треугольник 28
Симметрия 180
Симсон Р. 17, 55
Скопец З. А. 213
Скорняков Л. А. 212
Сложное отношение 131, 133, 186, 217
Смогоржевский А. С. 95, 213
Соосные окружности 47, 148, 170, 217
Сопряженные прямые 167
— точки 167
Сохранение углов 141
Степень точки 39, 42
Стереографическая проекция 183, 185, 217
Стюарт М. 17

Теорема Брианшона 95, 97, 177
— Вариньона 65 и далее
— косинусов 73
— о бабочке 59, 195
— о центре вращения 77
— Паппа 84
— Паскаля 92, 200
— Петерсена — Шута 123
— Птолемея 55, 131, 197
— Стюарта 17, 43, 190
— Фейербаха 33, 145
— Чевы 15, 67
— Штейнера — Лемуса 24
Тождественное преобразование 100
Точка Жергона 23
— Ферма 103
Траектория 182
Треугольник Боттемы 189
— Наполеона внешний 79, 124
— — внутренний 79
— равносторонний 38, 78, 194
— центров 78
Треугольника неравенство 204

Треугольники Наполеона 76, 217
Трехпараметрическое семейство 156
Трилинейные координаты 110
Трисекция угла 61

Угол отражения 108
— падения 108
Ультрапараллельные плоскости 156

Фаньяно Д. Ф. Т. 108
Фейербах К. 33
Фейеш Тот Л. 213
Ферма П. 44, 82
Флобер Г. 163
Фокус 163, 173
Фордер Г. Г. 92, 123, 213
Формула Брахмагупты 73
— Герона 74
Функции гиперболические 157
Функция показательная 157

Харди Г. Х. 213

Центр конического сечения 180
— тяжести 18
Центроид 18
Цепная линия 160

Чева Д. 15
Чевиана 15
Ченцов Н. Н. 213
Четырехсторонник полный 165
Четырехугольник вписанный 72
— выпуклый 66
— ортоцентрический 53, 147
— полный 165
— с входящим углом 66
— скрещенный 66

Шварц Г. А. 108
Шерватов В. Г. 213
Шествие углов 36
Шестиугольник 90, 210
Шклярский Д. О. 213
Штейнер Я. 24, 43
Шут Р. Г. 123

Эйлер Л. 30, 41, 160
Эксцентриситет 171
Эллипс 171

Юпитер 209

Яглом И. М. 47, 80, 213
Якобиан 206

Гарольд Коксетер, Самуэль Грейтцер

НОВЫЕ ВСТРЕЧИ С ГЕОМЕТРИЕЙ

(Серия: «Библиотека математического кружка»)

М., 1978 г., 224 стр. с илл.

Редактор *Ф. И. Кизнер*

Технический редактор *В. Н. Кондакова*

Корректоры *Е. А. Белицкая, Л. С. Сомова*

ИБ № 11192

Сдано в набор 01.02.78. Подписано к печати 25.10.78. Бумага 84×108¹/₃₂. тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать Условн. печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 10,14. Заказ № 953. Тираж 148 000 экз. Цена книги 50 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
«Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.